



MODELAGEM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA DINÂMICA POPULACIONAL DO ESTADO DO AMAPÁ

Karina da Silva Homobono¹, Elizandra Oliveira Pires², Carla Dominique Silva Vasconcelos³, Jefika Bezerra Bezerra⁴, Edcarlos Vasconcelos da Silva⁵, Simone de Almeida Delphim Leal⁶, Neylan Leal Dias⁷

^{1, 2, 3, 4} Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP) Campus Marco Zero, Macapá-AP.

⁴ Doutor em Saúde Pública com Ênfase em Métodos Matemáticos, Fundação Oswaldo Cruz (FIOCRUZ), professor do Colegiado Matemática da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP) Campus Marco Zero, Macapá-AP.

⁵ Doutora em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), Petrópolis-RJ, professora do Colegiado Matemática da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP) Campus Marco Zero, Macapá-AP.

⁶ Doutorando em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (UNESP), campus Bauru-SP, professor do Colegiado de Biologia da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP) Campus Oiapoque-AP.

E-mail: neylan@unifap.br

Recebido em: 15/11/2023 – Aprovado em: 15/12/2023 – Publicado em: 30/12/2023

DOI: 10.18677/EnciBio_2023D16

RESUMO

A modelagem matemática e estatística são ferramentas fundamentais para pesquisas envolvendo situações da vida real, onde seus resultados auxiliam nas tomadas de decisões acerca dos dados envolvidos. A dinâmica populacional desempenha um papel importante sobre o comportamento futuro de populações em estudo. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo usar a modelagem matemática, através de modelos clássicos de dinâmica populacional e a modelagem estatística, através da regressão linear, para a modelagem da população do estado do Amapá entre os anos de 1960 a 2022. Faz-se o uso da regressão para obter os parâmetros dos modelos de dinâmica populacional para a validação da modelagem. A metodologia empregada se mostrou bastante eficaz, obtendo resultados próximos dos dados reais, considerando assim válida a proposta empregada para a população do estado do Amapá. Uma vez que o modelo foi validado, faz-se uma previsão para a população do estado para o ano de 2040.

PALAVRAS-CHAVE: Amapá. Dinâmica Populacional; Modelagem Matemática e Estatística.

MATHEMATICAL AND STATISTICAL MODELING OF POPULATION DYNAMICS IN THE STATE OF AMAPÁ

ABSTRACT

Mathematical and statistical modeling are fundamental tools for research involving real-life situations, where their results help in making accurate decisions based on the data involved. Population dynamics plays an important role in the future behavior of the environment under study. Therefore, this work aims to use mathematical modeling, through classical models of population dynamics, and statistical modeling, through linear regression, to model the population of the state of Amapá between the years 1960 to 2022. use of regression to obtain the parameters of population dynamics models for modeling validation. The methodology used proved to be quite effective, obtaining results close to real data, thus considering the proposal used valid for the population of the state of Amapá. Once the model has been validated, a forecast is made for the state's population for the year 2040

KEYWORDS: Amapá. Population Dynamics; Mathematical and Statistical Modeling.

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é uma vertente da Matemática Aplicada e é amplamente utilizada em várias áreas do conhecimento como engenharias, matemática e ciências, devido a sua ampla aplicabilidade e também por descrever fenômenos do mundo real e suas tendências em forma de equações matemáticas (ZILL, 2016). Bassanezi (2010) considera uma técnica que ajuda a entender fenômenos reais de determinadas situações do cotidiano. Neste sentido, a Dinâmica Populacional usa as ferramentas da Modelagem Matemática para descrever o crescimento populacional de uma determinada população de interesse, e através desta modelagem chegar em conclusões acerca de comportamentos futuros (BASSANEZI, 2010).

Estudos em Dinâmica Populacional vem sendo amplamente utilizado em várias áreas como descrito por Barbosa *et al.*, (2022), que propuseram um modelo matemático de equações diferenciais parciais que simula a dinâmica da densidade populacional de mexilhões dourado ao longo do tempo na usina de Jupi, localizada no rio Paraná, este estudo comprovou a infestação destes mexilhões a partir da saída do rio Tietê. Já Thomas e Moraes (2020), fazem uso da dinâmica populacional para investigar a influência do crescimento populacional no Produto Interno Bruto (PIB) de Santa Rosa – RS, demonstrando a necessidade de planejamentos futuros para a cidade em termos financeiros com uso da modelagem populacional.

Santos e Santos (2021), propuseram um modelo matemático de dispersão populacional como estratégia para recuperação de áreas degradadas, que se mostrou um estudo promissor considerando que o desmatamento afeta diretamente o microclima local e o convívio das populações ecológicas. Pitol *et al* (2021), fizeram uso do modelo clássico de Verhulst para descrever a Dinâmica populacional de fungos causadores de doenças de tronco em videiras sob a ação de agentes inibidores. Neste estudo os resultados do modelo matemático foram comparados com os dados experimentais, e a modelagem se mostrou eficaz quando comparada com o crescimento do fungo. No entanto, a presença de inibidores nas culturas retardam o crescimento, o que requer uma adaptação por parte do modelo matemático.

A modelagem estatística também é utilizada em paralelo com a modelagem matemática, pois busca modelar fenômenos do dia a dia de forma discreta, de modo

a obter conclusões acerca do que está sendo analisado. Mais especificamente utiliza-se a modelagem estatística para o estudo de parâmetros para modelos de Dinâmica Populacional, como em Figueiredo *et al.* (2019), que usaram a modelagem estatística para estimar parâmetros para a equação logística ou modelo de Verhulst.

A População do estado do Amapá está encaminhando-se para um milhão de habitantes nos próximos anos, desta forma, aplicar metodologias que possam prever quando o estado irá alcançar este número se tornam essenciais para o planejamento de políticas públicas.

Neste trabalho foi feita a Dinâmica Populacional do Estado do Amapá nos anos de 1960 até 2022 e compararam-se os resultados da modelagem com os dados da população real. Através dos Modelos de Malthus e Verhulst, além de usar a proposta de Figueiredo *et al.* (2019), para obter melhores parâmetros para os modelos estudados. Por fim já com o modelo validado foi feita a estimação da população do Amapá até o ano de 2040 objetivando estimar a população do Amapá até o ano de 2040.

MODELOS CLÁSSICOS DE DINÂMICA POPULACIONAL

Os modelos matemáticos desenvolvidos por Malthus (1798) e Verhulst (1838) são modelos clássicos na modelagem do crescimento de uma população que são amplamente utilizados para prever o crescimento futuro de uma população. O modelo proposto por Malthus consiste em uma equação diferencial ordinal linear de primeira ordem dada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

cuja solução analítica é:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (1)$$

Onde P_0 é a população inicial e r é a taxa de crescimento populacional, ou constante de proporcionalidade que é dada por $\alpha - \beta$, com:

$\alpha = \text{Taxa de natalidade}$

$\beta = \text{Taxa de mortalidade}$

Note que:

- Se $\alpha > \beta \Rightarrow r > 0$, logo a população cresce e:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = \infty$$

- Se $\alpha < \beta \Rightarrow r < 0$, logo a população decresce e:

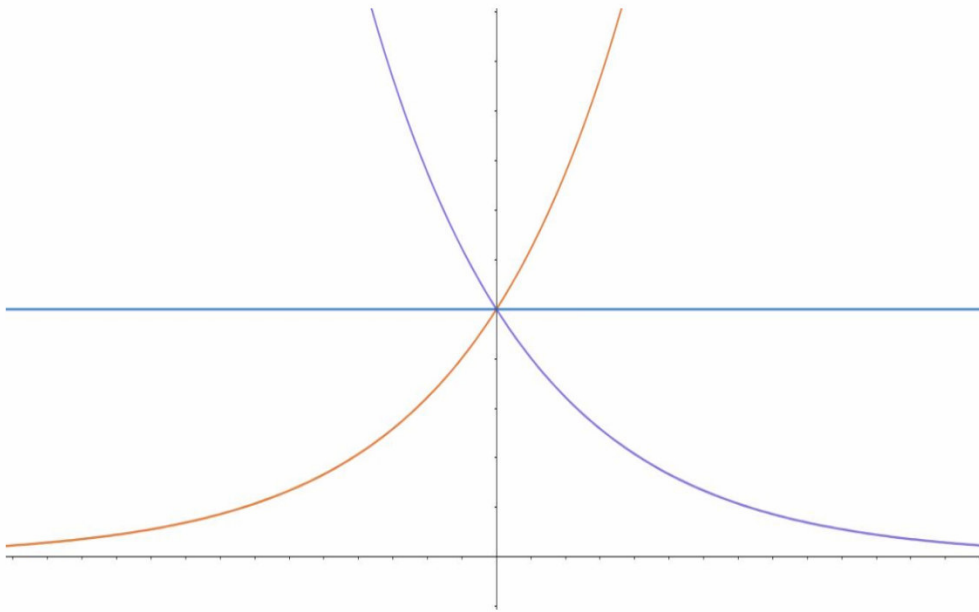
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = 0$$

- Se $\alpha = \beta \Rightarrow r = 0$, logo a população permanece constante e:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = P_0$$

Graficamente, tem-se:

GRÁFICO 1 – Gráfico de crescimento e decrescimento populacional via Malthus



Fonte: Autores (2023)

Já o modelo de Verhulst consiste numa equação diferencial ordinal não linear de primeira ordem representada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k} \right)$$

Cuja solução Analítica

$$P(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{P_0} - 1 \right) e^{-rt}} \quad (2)$$

Os parâmetros r e P_0 são os mesmos usados pela equação 3, tendo um novo parâmetro K que é a capacidade de suporte do meio, ou limite sustentável, onde:

- Se $P > k \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -rP$
- Se $P < k \Rightarrow \frac{dP}{dt} = rP$
- Se $P = k \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0$

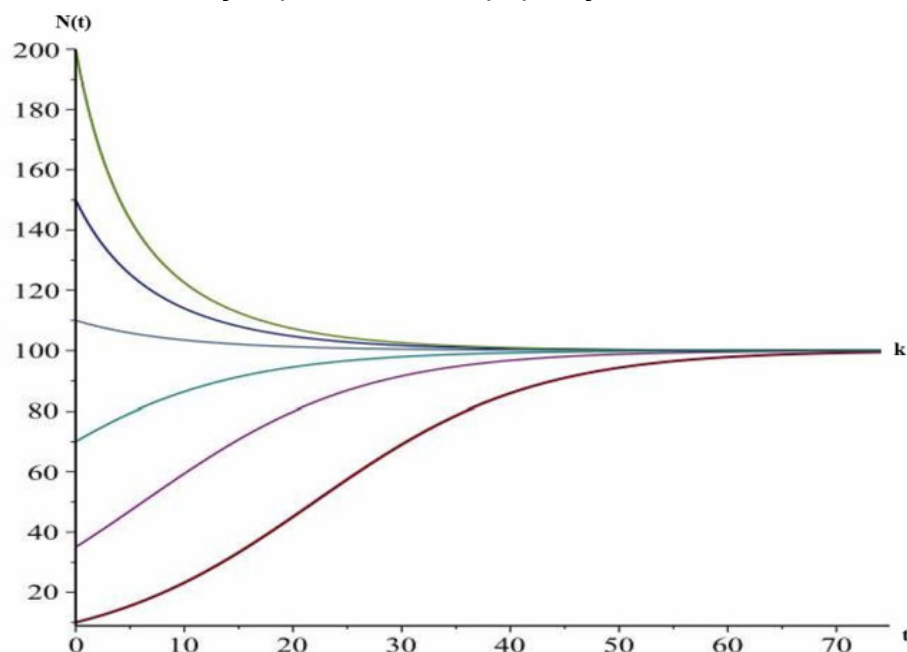
• Segue da equação (5) que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = k$

Isto é,

- i) A população decresce até a capacidade de k quando $P_0 > k$.
- ii) A população cresce até a capacidade de k quando $P_0 < k$.
- ii) A população permanece constante quando $N_0 = k$.

Graficamente, tem-se:

GRÁFICO 2 – Variação parâmetro k e população, via modelo de Verhulst.



Fonte: Autores (2023)

REGRESSÃO LINEAR

Vários pesquisadores têm usado a Regressão Linear em diversos contextos como em Santos *et al.* (2021) que aplicaram a regressão linear para analisarem a qualidade da água. Nas engenharias nos estudos de Maués *et al.* (2022) e em Inteligência Artificial como em Cunha Neto *et al.* (2021). A regressão linear consiste em aproximar dados de uma tabela com n dados por uma reta da forma $y = ax + b$, os valores de a e b devem ser dados por:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}$$

e

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n X_i^2 - Y_i X_i \sum_{i=1}^n X_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}$$

Em que $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ e $Y = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ são os dados relativos as variáveis x e y . Já $Y_i X_i$ significa o produto interno usual de R^n entre os vetores $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ e $Y = \{Y_1, \dots, Y_n\}$. Dessa forma, uma vez obtidos os valores de a e b definem-se os parâmetros do Modelo de Malthus e Verhulst como:

$$r = b$$

e

$$k = \frac{-r}{a}$$

Para isso, faz-se:

$$Y = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$$

e

$$X = P$$

MATERIAIS E MÉTODOS

Este estudo foi desenvolvido com base em modelagem matemática e estatística, com uso de dados secundários. A base de dados principal consistiu na população real do Amapá, obtida no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, cuja série temporal foi de 1960 até 2022.

Dentre os modelos de Dinâmica Populacional optou-se pelos modelos de Malthus e Verhulst por serem modelos clássicos e ainda muito utilizados para modelar o crescimento demográfico de uma determinada população. Após esta escolha coletaram-se os dados da população do Amapá no site do IBGE, e foram adicionados seis dados aos originais através de interpolação nos anos de 1965, 1975, 1985, 1995, 2005 e 2015. Esta interpolação foi necessária para que a metodologia de estimação de parâmetros alcançasse bons ajustes. Após esta interpolação utilizou-se a regressão linear para obtenção dos parâmetros dos dois modelos de Dinâmica Populacional escolhidos. Uma vez que os resultados obtidos pela simulação ainda não demonstraram-se satisfatórios, empregou-se uma segunda metodologia para obtenção de novos parâmetros e dessa forma melhorar os resultados obtidos, quando comparadas as simulações e os dados reais.

Os modelos foram validados estatisticamente e, as variações no modelo de Verhulst demonstrou melhor similaridade com os dados reais. Por se tratar de um estudo com dados secundários disponibilizados gratuitamente na internet, não foi necessário registrar a pesquisa em Comitê de Ética em Pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos na modelagem estatística para a obtenção dos parâmetros através das tabelas. Na tabela 1 tem-se os dados reais da população do Amapá com a série temporal variando desde 1960 até a contagem oficial do censo de 2022 divulgado pelo IBGE, de 2022.

TABELA 1 – Dados da população Amapaense (desde 1960 até 2022).

Tempo (t)	Ano	População Amapaense (P(x))
0	1960	68.889
5	1965	91.559
10	1970	114.230
20	1975	144.230
25	1980	175.258
30	1985	227.139
35	1991	289.397
40	1995	372.790
45		
50	2000	477.032
55	2005	573.279
60	2010	669.526
62	2015	696.289
	2022	733.759

Fonte: Autores (2023)

Ressaltam-se que os dados na Tabela 1 dos anos 1960, 1970, 1980, 1991, 2000, 2010 e 2022 foram obtidos dos dados coletados pelos censos do IBGE (IBGE, 2022). Já os dados dos anos de 1965, 1975, 1985, 1995, 2005 e 2015 foram obtidos através da função $approxfun(x,y)$ do software R. Esta interpolação foi necessária para que a metodologia proposta pudesse apresentar melhores resultados.

TABELA 2 – Cálculos para a regressão.

$1/P(x)$	$\frac{dP}{dt}$	$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = X$	$P^2 = X^2$	$X_i Y_i$
1,45161E-05	4534	0,065816023	4,74569432E+09	4534
1,09219E-05	4534,2	0,049522166	8,38305048E+09	4534,2
8,75427E-06	6000	0,052525606	1,30484929E+10	6000
6,93337E-06	6205,6	0,043025723	2,08022929E+10	6205,6
5,70587E-06	10376,2	0,059205286	3,07153665E+10	10376,2
4,40259E-06	10376,33	0,045682746	5,15921253E+10	10376,33333
3,45546E-06	20848,25	0,072040311	8,37506236E+10	20848,25
2,68248E-06	20848,4	0,05592532	1,38972384E+11	20848,4
2,0963E-06	19249,4	0,040352429	2,27559529E+11	19249,4
1,74435E-06	19249,4	0,033577717	3,28648811E+11	19249,4
1,49359E-06	5352,6	0,007994611	4,48265064E+11	5352,6
1,43619E-06	5352,8571	0,007687695	4,84818371E+11	5352,857143

Fonte: Autores (2023)

Na tabela 2 estão os valores necessários para os cálculos da regressão linear, onde:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Já na Tabela 3 a síntese das expressões que foram calculadas para obter os parâmetros a e b .

TABELA 3 – Síntese dos somatórios da regressão

Parâmetros	Valor
n	12
$\sum x$	3.899.618
$(\sum x)^2$	1,5207E+13
$\sum x^2$	1,841301807258E+12
$\sum y$	0,533355633
$\sum (X_i Y_i)$	132927,2405
$\sum x \cdot \sum y$	2079883,228

Dessa forma substituindo nas Equações (3) e (4) obtém-se:

$$a = \frac{12 \times 132927,2405 - 3.899.619 \times 0,533355633}{12 \times 1841301807258 - 15210000000000}$$

$$a = -0,00000007037079554744$$

e

$$b = \frac{0,533355633 \times 1841301807258 - 132927,2405 \times 3.899.619}{12 \times 1841301807258 - 1521000000000}$$

$$b = 0,0673146$$

Dessa forma

$$k = \frac{-r}{a} = \frac{-0,0673146}{-0,00000007037079554744} = 956569,7058$$

e

$$r = b = 0,0673146$$

Estes parâmetros foram utilizados para o Modelo de Malthus e Verhulst 01. Na tabela 4 estão os valores obtidos pelos modelos de Malthus e Verhulst 01 usando os parâmetros encontrados pela primeira metodologia. Claramente os valores do Modelo de Malthus explodem logo após o terceiro valor dos dados reais, o que já não acontece com os resultados obtidos por Verhulst 01.

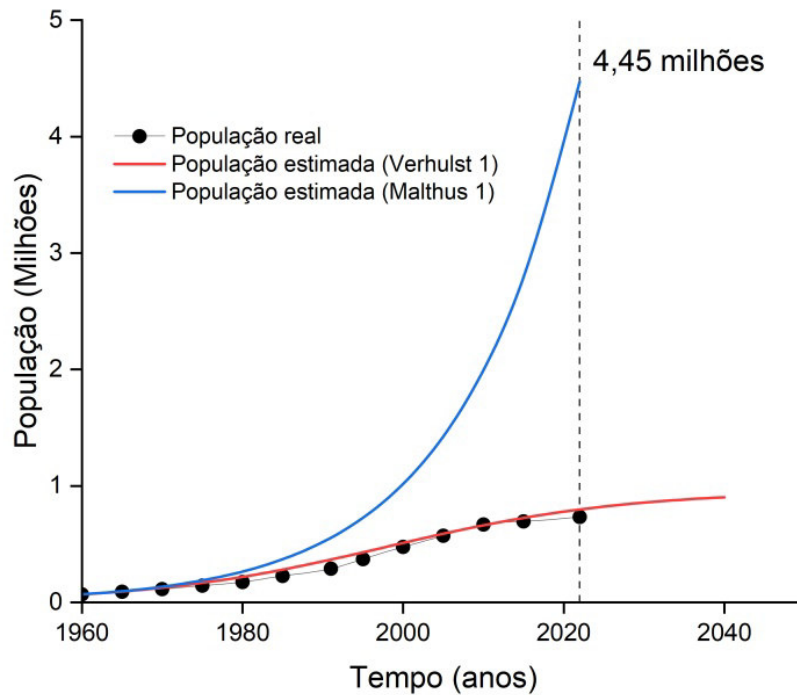
TABELA 4 – Comparativo dos resultados obtidos pelos modelos Malthus e Verhulst.

t	Valor real	Malthus 01	Verhulst 01	Erro Verhulst 01
0	68.889	68889	68889	0%
5	91.559	96454,30468	93752,65067	2%
10	114.230	135049,6145	126313,2298	11%
15	144.230	189088,4853	167980,5832	16%
25	175.258	264750,5171	219754,8272	25%
30	227.139	370688,0204	281784,602	24%
35	289.397	555155,4811	368056,277	27%
40	372.790	726694,7444	430590,1566	16%
45	477.032	1017475,015	510869,4082	7%
50	573.279	1424608,357	589345,5186	3%
55	669.526	1994652,39	661972,0852	-1%
60	696.289	2792794,341	725858,0556	4%
62	733.759	4473829,032	798194,8239	9%

Fonte: Os autores (2023)

Na figura 1 destacam-se os resultados gráficos com os modelos de Malthus 01 e Verhulst 01 sendo comparados com os dados reais. O modelo de malthus obteve resultados muito distantes quando comparados com os dados reais, devido ao fato de ser um modelo puramente exponencial, já no ano de 1980 este modelo distancia-se dos dados reais e explode, chegando a quatro milhões para o ano de 2022. Já o modelo de Verhulst 01 obteve melhor aproximação dos dados reais, como exposto no gráfico os valores são muito próximos dos dados reais no período em que foi feita a simulação. No entanto, na Tabela 4 ainda obtêm-se resultados com percentual alto quando comparados aos dados reais, em alguns pontos com erro relativo de até 27%, sendo o erro relativo médio obtido de 11%.

FIGURA 1 – Estimativas populacionais dos modelos Verhulst 1 e Malthus 1



Fonte: Os autores (2023)

Bassanezzi (2010) propõe uma nova estratégia para obter um melhor ajuste para o Modelo de Verhulst, que é seguindo o ponto de inflexão do modelo, como:

$$P(\bar{t}) = \frac{k}{2} \quad (5)$$

sendo \bar{t} o ponto de inflexão. Assim tem-se:

$$\frac{k}{1 + \left(\frac{k}{P_0} - 1\right) e^{-rt}} = \frac{k}{2}$$

Usando as propriedades de Logaritmos e isolando r obtém-se:

$$r = \frac{1}{\bar{t}} \ln \left(\frac{k - P_0}{P_0} \right) \quad (6)$$

Observa-se que:

$$\frac{k}{2} = \frac{956569}{2} = 478284,5$$

Observando na Tabela 4 os valores obtidos por Verhulst 1 conclui-se que \bar{t} está entre $t = 40$ e $t = 45$. Dessa forma admite-se que o valor da inflexão $\frac{k}{2}$ será aproximada pela média entre $P(40)$ e $P(45)$, isto é :

$$\frac{k}{2} = \frac{P(40) + P(45)}{2} = \frac{372790 + 477032}{2} = 424911$$

Assim

$$k = 849822$$

E também a média do tempo, ou seja:

$$\bar{t} = \frac{40+45}{2} = 42,5$$

Agora obtêm-se um novo valor para r dado pela equação (6)

$$r = \frac{1}{37,5} \ln \left(\frac{849.822 - 68.889}{68.889} \right)$$

$$r = 0,064746476$$

Dessa forma pode-se simular o modelo de Verhulst 2, assim chamado por estar usando outros parâmetros, e comparar com os dados reais. Na tabela 5 estão os valores obtidos tanto pelo modelo de Verhulst 1 quanto pelo modelo Verhulst 2, e é notável que os resultados obtidos pela metodologia proposta para obtenção de novos parâmetros demonstra melhores resultados quando comparados com os dados reais.

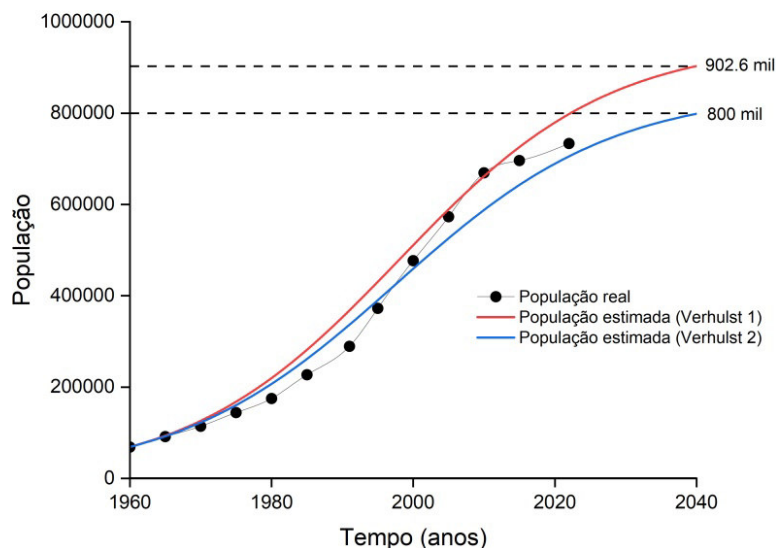
TABELA 5 – Comparativo entre Verhulst 1 e Verhulst 2

Ano	Valor real	Verhulst 1	Verhulst 2	Erro Verhulst 2
1960	68.889	68889	68889	0%
1965	91.559	93752,65067	92361,55762	1%
1970	114.230	126313,2298	122576,5733	7%
1975	144.230	167980,5832	160580,5828	11%
1980	175.258	219754,8272	207013,425	18%
1991	227.139	281784,602	261773,2922	15%
1995	289.397	368056,277	336795,3956	16%
2000	372.790	430590,1566	390596,5269	5%
2005	477.032	510869,4082	459225,4731	-4%
2015	573.279	589345,5186	526098,4735	-8%
2022	669.526	661972,0852	588048,7078	-12%
	696.289	725858,0556	642808,575	-8%
	733.759	798194,8239	705431,5505	-4%

Fonte: Os autores (2023)

Na figura 2 está a comparação do Modelo de Verhulst 1 e Verhulst 2, os quais consistem no mesmo modelo porém com parâmetros obtidos de formas diferentes. Graficamente o modelo de Verhulst 02 foi o que obteve melhor aproximação dos dados reais, sendo o erro médio relativo de apenas 3%. A previsão do modelo de Verhulst 01 é de 900 mil habitantes para o ano de 2040 e para o modelo de Verhulst 02 de 800 mil habitantes.

FIGURA 2 – Estimativas populacionais do Amapá com os modelos de Verhulst 1 e Verhulst 2



Fonte: Os autores (2023)

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi possível validar a modelagem matemática proposta com a intervenção da modelagem estatística, e mostrar que a utilização dessas duas ferramentas são muito importantes para obter melhores resultados. A modelagem dos dados da população do Amapá é de grande importância, considerando que a população está próxima de alcançar um milhão de habitantes, e os resultados apresentados mostraram que até 2040 essa quantidade ainda não será alcançada. Dessa forma os resultados servem de subsídios para as decisões de políticas públicas para o desenvolvimento do estado. Ressalta-se que os dados foram validados já com a contagem recente feita pelo Censo do IBGE (2023), tornando o resultado do estudo bastante adequado.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, C. H. X. B., DIAS, C. M., PASTORE, D. H., SILVA, J. C. R., COSTA, A. R. C., *et al.*; Modelagem matemática para a infestação de mexilhões dourados no reservatório da hidroelétrica de Jupia-SP. **Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza**, v. 6, n. 1, p.1-9, 2022. Disponível em <https://cfp.revistas.ufcg.edu.br/cfp/index.php/RPECEN/article/view/e1868/pdf>

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. **Revista de Matemática da UFOP**, São Paulo: Editora Contexto, 2010.

CUNHA NETO, E. M.; MOURA, M. M.; ARAUJO, E. C. G.; SANTANA, G. M.; CORTE, D. A. P.; *et al.*; Aprendizado de máquina e regressão linear na estimativa do volume de Eucalyptus na Amazônia Oriental. **BIOFIX Scientific Journal**, v. 6, n. 1, p. 08-14, 2021. Disponível em <https://revistas.ufpr.br/biofix/article/view/75092/41306>

FIGUEIREDO, J. K.; MARTINS, E. M.; FERREIRA, W. M.; A equação logística aplicada à população brasileira. 2019. **Revista de Matemática da UFOP** (2237-8103): v.06 p:63-82 2019. Disponível em <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/1888/1666> Acesso em: 13/10/2023

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Censo Brasileiro de 2022**. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. Disponível em <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ap/panorama>.

MAUÉS, F. C. A.; MELO, K. P. de; LEÃO, C. B. de O.; SERRA, S. M. B.; Estimativa de custos paramétricos de construção de edifícios usando modelo de regressão linear. **Gestão & Tecnologia De Projetos**, 17(2), 19-37., 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/gtp.v17i2.168355>

THOMAS, G. C.; MORAES, L. C.; Estudo do comportamento econômico de Santa Rosa/RS baseado em um modelo matemático de dinâmica populacional/The study of Santa Rosa's economic behavior based on a population dynamic's mathematical model. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 7, p. 44517-44524, 2020. Disponível em <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/12859/10893>.

PITOL, L., WEIMANN, T., STROSCHEIN, S. D., ALMANÇA, M. A. K., OLIVEIRA, C. S., *et al.*; Dinâmica populacional de fungos causadores de doenças de tronco em videiras sob a ação de possíveis agentes inibidores. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 7, n. 1, e3003-e3003, 2021. Disponível em <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4432/2839>.

SANTOS, C. F. L.; SANTOS, F. L. P.; Modelagem matemática para descrever a influência da vegetação no microclima local amazônico. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 8, n. 1, 2021. Disponível em <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3647/3676>.

SANTOS, B. G., VALENTINI, H. K. V.; VIEIRA, M. V. B; Análise de regressão linear aplicada à modelagem de uma nova equação para o monitoramento de qualidade da água: estudo de caso do Arroio Moreira/Fragata. **Revista Ambientale**, v. 13, n. 1, p. 13–27, 2021. Disponível em <https://periodicosuneal.emnuvens.com.br/ambientale/article/view/262/220>.

ZILL, D.G.; **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**, v. 1. Tradução da 10ª edição norte-americana. Tradução de Márcio Koji Umezawa. 3. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.