



ESTRATÉGIAS DE DISCRETIZAÇÃO DA CONDIÇÃO DE SIMETRIA NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA SECAGEM DE BANANAS

Jeniffer Cristina Silveira¹, Nathália Viégas Busato², Andréa Oliveira Souza da Costa³, Esly Ferreira da Costa Junior³

1. Graduanda em Engenharia Química (jeniffercristinasilveira@hotmail.com)

2. Graduanda em Engenharia Química

3. Docente do curso de Engenharia Química

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo, Campus de Alegre, Alto Universitário, s/n, Caixa Postal 16, Guararema, Alegre - ES, Brasil. CEP: 29.500-000

Recebido em: 06/05/2013 – Aprovado em 17/06/2013 – Publicado em 01/07/2013

RESUMO

Frutas e vegetais são altamente perecíveis devido aos seus altos teores de umidade. Desta forma, uma prática comum é a secagem do alimento com o objetivo de inibir o seu deterioramento. A modelagem matemática do processo é indispensável para o projeto de plantas industriais visando boas condições de funcionamento. Diversos trabalhos da literatura empregam modelos matemáticos baseados na teoria de difusão de líquido. Neste trabalho duas estratégias de discretização da condição de simetria no interior da banana são aplicadas e seus resultados são comparados no que se refere à convergência da malha. Uma das estratégias é a proposta por AMENDOLA & QUEIROZ (2007) e consiste no uso da aproximação da derivada primeira por diferenças finitas para frente. A segunda estratégia consiste na solução da própria equação da difusão no centro da banana, aplicando a condição de contorno e resolvendo-se a indeterminação, causada pela divisão pelo raio nulo, calculando-se o limite pela regra de L'Hôpital. Os resultados são comparados com a solução analítica e observa-se que a segunda estratégia propicia uma convergência mais rápida, diminuindo-se o custo computacional da solução.

PALAVRAS-CHAVE: diferenças finitas, condição de simetria, convergência da malha, secagem de bananas.

DISCRETIZATION STRATEGIES OF THE SYMMETRY CONDITION IN THE NUMERICAL SOLUTION OF BANANA DRYING

ABSTRACT

Fruits and vegetables are highly perishable because of their high moisture content. For this reason they are dried in order to inhibit their deterioration. The mathematical modeling of this process is essential for the design of industrial plants drying of foods with good working condition. Several studies in the literature employ mathematical models based on the theory of diffusion of liquid. In this paper, two discretization strategies of the symmetry condition inside the banana are applied and its results are

compared in terms of convergence of the mesh. The first strategy is used by AMENDOLA & QUERIOZ (2007) and consists of the use of the first order forward difference derivative. The second strategy consists in the solution of the diffusion equation in the center of the banana, applying the boundary condition and solving the indeterminacy, caused by null radius in the quotient, through the calculation of the limit applying the L'Hospital's rule. The results are compared with the analytical solution and it has been observed that the second strategy provides faster convergence and a lower computational cost.

KEYWORDS: finite difference, symmetry condition, mesh convergence, banana drying.

INTRODUÇÃO

Frutas e vegetais são característicos por possuírem elevado teor inicial de umidade, sendo assim considerados altamente perecíveis. A preservação desses alimentos pode ser obtida através da utilização de processo de secagem, refrigeração, apertização ou tratamentos químicos. A secagem é a forma de preservação mais antiga e mais utilizada porque, além de oferecer custos mais baixos, é de operação mais simples. Removendo-se a umidade do alimento é possível inibir o desenvolvimento de micro-organismos e retardar deteriorações de origem físico-química (CANO-CHAUCA et al., 2004).

A banana (*Musa ssp.*) é uma fruta de grande importância econômica. Este alimento de pequeno valor agregado e elevado valor nutritivo possui um rápido processo de deterioração, o que dificulta a comercialização do fruto *in natura* após o amadurecimento. Neste caso, o processo de desidratação é indicado como forma de evitar estas perdas, sendo assim uma interessante alternativa econômica (BORGES et al., 2010).

A secagem é definida pela combinação de vários fatores, dentre eles tem-se a retirada de umidade da superfície do produto e a difusão de umidade do interior em direção à superfície do mesmo (COSTA, 2008). Pode-se dizer que a desidratação de frutas corresponde à eliminação quase completa da umidade do alimento à custa de equipamentos, atingindo-se normalmente de 15% a 25% de umidade no produto final (OETTERER et al., 2006).

Pode-se definir desidratação como a aplicação de calor, sob condições controladas, para retirar a maior parte da água presente em um alimento, por evaporação. Ao aquecer o ar e soprá-lo sobre o alimento, o calor é transferido para a superfície do mesmo e o calor latente de vaporização remove sua umidade. O vapor de água difunde-se em uma película delimitante do ar e é carregado por esse movimento. Isso cria uma região de baixa pressão de vapor de água na superfície do alimento e um gradiente de pressão é estabelecido no interior úmido para o ar. A força motriz para a remoção da água vem desse gradiente de pressão (OETTERER et al., 2006).

Segundo QUEIROZ & NEBRA (1997), pesquisadores da área de secagem de alimentos e grãos preferem elaborar modelos matemáticos deste processo baseados na teoria de difusão de líquido. Entretanto, existem algumas considerações a serem realizadas para a aplicação dos mesmos, como: não há efeito de capilaridade, a redução de volume é negligenciada, os corpos entram em equilíbrio térmico com o ar instantaneamente e os efeitos da transferência de energia e massa de um corpo para outro são desprezíveis. Devido às limitações de

ordem prática, essas suposições são consideradas satisfatórias quando utilizadas para produtos biológicos (PAULO Jr. & CORRÊA, 1999).

SILVA et al., (2008) simularam numericamente a difusão de água em sólidos cilíndricos (banana e arroz com casca), considerando os coeficientes de transporte e o raio do cilindro variáveis ao longo do processo, sendo possível concluir que, com a difusividade de massa variável obteve-se uma adequação do modelo aos dados experimentais.

Para descrever o transporte de água através de um modelo de difusão, devem ser conhecidas as condições iniciais e de contorno. Na literatura, a condição de contorno mais utilizada é a do primeiro tipo (valor especificado) (SILVA et al., 2008, 2009; VEGA-GÁLVEZ et al., 2008; BOERI et al., 2011; MUNDADA et al., 2011), mas o terceiro tipo (convecção na superfície) também é encontrado em alguns trabalhos como, por exemplo, em SILVA et al., (2010).

A modelagem matemática do processo de secagem de alimentos é indispensável para o projeto de plantas industriais visando boas condições de funcionamento.

O objetivo geral deste trabalho consiste na discretização e implementação do modelo proposto por AMENDOLA & QUEIROZ (2007) para a secagem de bananas, utilizando o método de diferenças finitas. Além disso, objetivou-se a diminuição do custo computacional da resolução numérica alterando-se o modo de calcular a condição de contorno no centro da banana, utilizando-se diferenças finitas centrais e considerando-se a condição de simetria na solução da própria equação de difusão.

MATERIAL E METODOS

O modelo considerado como base para o desenvolvimento deste trabalho foi proposto por AMENDOLA & QUEIROZ (2007), que consideram um modelo de difusão aplicado a um processo de secagem de bananas, baseado na segunda lei de Fick. Para tal, foram feitas as seguintes considerações:

- O processo de secagem ocorre no interior de uma porção cilíndrica, de comprimento L (m) e raio definido entre $R_1 = 0$ m e $R_2 = 0,01522$ m, sendo que R_2 é o raio inicial das bananas.
- $R_2 \ll L$ (cilindro infinito).
- O teor de umidade inicial do produto, M_0 , é uniforme em relação a r .
- O teor de água da superfície do produto, M_e , é mantido fixo em todo o processo de secagem.
- O produto tem uma simetria axial.
- O coeficiente de difusão é constante.
- O encolhimento da banana é negligenciado.

A relação que descreve o modelo é representada pela Eq. (1).

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \left[\frac{\partial M}{r \partial r} + \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} \right] \quad (1)$$

onde M é o índice de umidade (kg de água por kg de matéria seca), t é o tempo (h), D é o coeficiente de difusão ($m^2 h^{-1}$) e r é a coordenada radial (m).

As condições inicial e de contorno para este modelo são representadas pelas Eqs. (2), (3) e (4), respectivamente.

$$M(r, 0) = M_0; r \in (R_1, R_2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 0; r = R_1; t > 0 \quad (3)$$

$$M(R_2, t) = M_e; t > 0 \quad (4)$$

onde M_0 é o teor de umidade inicial (kg de água / kg de matéria seca) e M_e é a umidade de equilíbrio (kg de água / kg de matéria seca).

A solução analítica para a Eq. (1) é dada por (CRANK, 1975):

$$\frac{M(r, t) - M_e}{M_0 - M_e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-D\alpha_n^2 t} J_0(r \cdot \alpha_n)}{R_2 \alpha_n J_1(R_2 \cdot \alpha_n)} \quad (5)$$

onde R_2 é o raio inicial da seção transversal (m), α_n são as raízes de $J_0[R_2 \alpha_n] = 0$ e J_0 é a função de Bessel de ordem zero, J_1 é a função de Bessel de primeira ordem.

AMENDOLA & QUEIROZ (2007) validam a solução numérica do modelo, comparando os valores de umidade média na banana obtidos numericamente e por meio da solução analítica do problema, conforme a Eq. (6):

$$\frac{\bar{M}(t) - M_e}{M_0 - M_e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-D\alpha_n^2 t}}{(R_2 \alpha_n)^2} \quad (6)$$

Ressalta-se que houve um equívoco por parte de AMENDOLA & QUEIROZ (2007) ao apresentarem a Eq. (6) em seu trabalho, visto que o denominador contido no somatório deveria estar elevado ao quadrado, de acordo com CRANK (1975). Neste trabalho, todos os cálculos da solução analítica foram realizados no software Mathcad 14.0.

Para o cômputo da umidade média a partir da solução numérica, utilizou-se a Eq. (7):

$$\bar{M}(t) = \frac{1}{\pi R_2^2} \int_0^{R_2} M(r, t) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (7)$$

A integral do lado direito foi feita pela soma das integrais, no entorno de cada ponto de discretização, da aproximação por polinômios interpoladores de Lagrange quadráticos (mesmo grau das aproximações das derivadas por diferenças finitas para os pontos centrais).

Para a resolução do modelo apresentado, constituído por uma equação diferencial parcial, EDP, e suas condições inicial e de contorno, AMENDOLA & QUEIROZ (2007) utilizam o método de diferenças finitas com integração no tempo pelo método de Euler Explícito. Para verificar apenas os erros de discretização da direção espacial sem a interferência dos erros de integração no tempo, optou-se neste trabalho pela discretização da Eq. (1) na direção espacial (raio) e integração do sistema de equações diferenciais ordinárias, EDOs, resultante numa implementação do método de Runge-Rutta do Matlab, com tolerâncias relativas e

absolutas de integração de 10^{-8} . Desta forma, os erros de integração no tempo são negligenciáveis. Foram utilizadas duas metodologias diferentes para o cálculo do valor da condição de contorno no centro da banana, visto que, comparando-se a quantidade de pontos na malha utilizada para cada uma das metodologias, seria possível identificar a metodologia que reduzisse o custo computacional.

Para efeito de comparação, os dados experimentais utilizados neste trabalho são os mesmos apresentados por AMENDOLA & QUEIROZ (2007), para um tempo de secagem de 40 h, sendo os parâmetros fixos: $M_0=3,21$, $M_e=0,0559$ e $D = 1,58 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{h}^{-1}$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Visando a resolução numérica do modelo proposto por AMENDOLA & QUEIROZ (2007), discretizou-se a componente espacial (raio) da Eq. (1), como representado pela Figura 1, aplicando-se o método de diferenças finitas centrais.

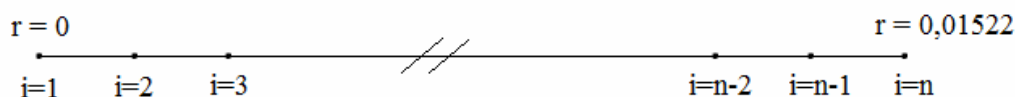


FIGURA 1 – Discretização da componente espacial (raio).

As derivadas primeira e segunda discretizadas são representadas pelas Eqs. (8) e (9), respectivamente.

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2\Delta r} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} = \frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}}{\Delta r^2} \quad (9)$$

Substituindo as Eqs. (8) e (9) na Eq. (1) obtêm-se:

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = D \left(\frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2r_i \Delta r} + \frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}}{\Delta r^2} \right) \quad (10)$$

Para a Metodologia 1, as condições inicial e de contorno, respectivamente, são as seguintes:

$$t = 0: \quad M_i = M_0 \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (11)$$

$$r = R_1: \quad \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{M_2 - M_1}{\Delta r} = 0, \quad \text{logo } M_2 = M_1 \quad (12)$$

$$r = R_2: \quad M_n = M_e \quad (13)$$

Ressalta-se que a Eq. (12) foi obtida a partir da aplicação de diferenças finitas para frente na derivada primeira e a partir da condição de simetria do problema.

Utilizando-se a Metodologia 2, as condições inicial e de contorno, respectivamente, são as seguintes:

$$t = 0: \quad M_i = M_0 \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (14)$$

$$r = R_1: \quad \frac{\partial M_x}{\partial t} = 4D \left(\frac{M_2 - M_1}{\Delta r^2} \right) \quad (15)$$

$$r = R_2: \quad M_n = M_e \quad (16)$$

Para o desenvolvimento da Eq. (15), utilizou-se o fato de que, embora para a malha proposta o ponto com $i=1$ seja de contorno, este ponto é fisicamente um ponto interno (centro da banana). Com isto, o valor da umidade num ponto anterior a este (M_0) é igual ao valor da umidade no ponto posterior (ou seja, tem-se simetria). Desta forma, $M_0=M_2$. Com o valor de M_0 definido, a própria equação da difusão poderia ser aplicada. Entretanto, pode-se observar que na Eq. (1), o primeiro termo do lado direito apresenta uma indeterminação, resultante da divisão da derivada primeira (igual a zero) pelo raio nulo. Desta forma, aplicou-se o limite com r tendendo a zero na Eq. (1), como mostra a Eq. (17).

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right) = D \left[\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{r \partial r} \right) + \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} \right) \right] \quad (17)$$

Aplicando-se a regra de L'Hôpital no primeiro termo do lado direito, obtém-se a Eq. (18).

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right) = D \left[\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}}{1} \right) + \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} \right) \right] \quad (18)$$

Sendo assim, a Eq. (18) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2D \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} \quad (19)$$

Aplicando o método de diferenças finitas centrais na Eq. (19), e utilizando-se a definição de M_0 como sendo igual a M_2 , obtém-se:

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = 2D \left(\frac{M_2 - 2M_1 + M_0}{\Delta r^2} \right) \quad (20)$$

Rearranjando-se a Eq. (20), obtém-se a Eq. (15), já apresentada.

Conforme já discutido, a resolução do sistema de EDOs, obtido a partir da discretização, foi realizada através do *software* MATLAB utilizando-se a rotina de integração baseada no método de Runge Kutta. Com isto, o erro de integração foi

controlado para valor praticamente nulo (tolerâncias em 10^{-8}) e os erros numéricos apresentados podem ser considerados como sendo exclusivamente devidos aos erros de discretização.

Observa-se que, a solução numérica obtida converge com o refinamento da malha para a solução analítica em ambas as metodologias testadas. Considerando-se apenas o valor médio de umidade na banana, a convergência é um pouco mais rápida para a segunda metodologia. Para comparação, foi considerada a condição experimental simulada por AMENDOLA & QUEIROZ (2007). A figura 2 apresenta a comparação entre os resultados obtidos para a umidade média, considerando-se o valor experimental, solução numérica convergida do modelo e a solução analítica.

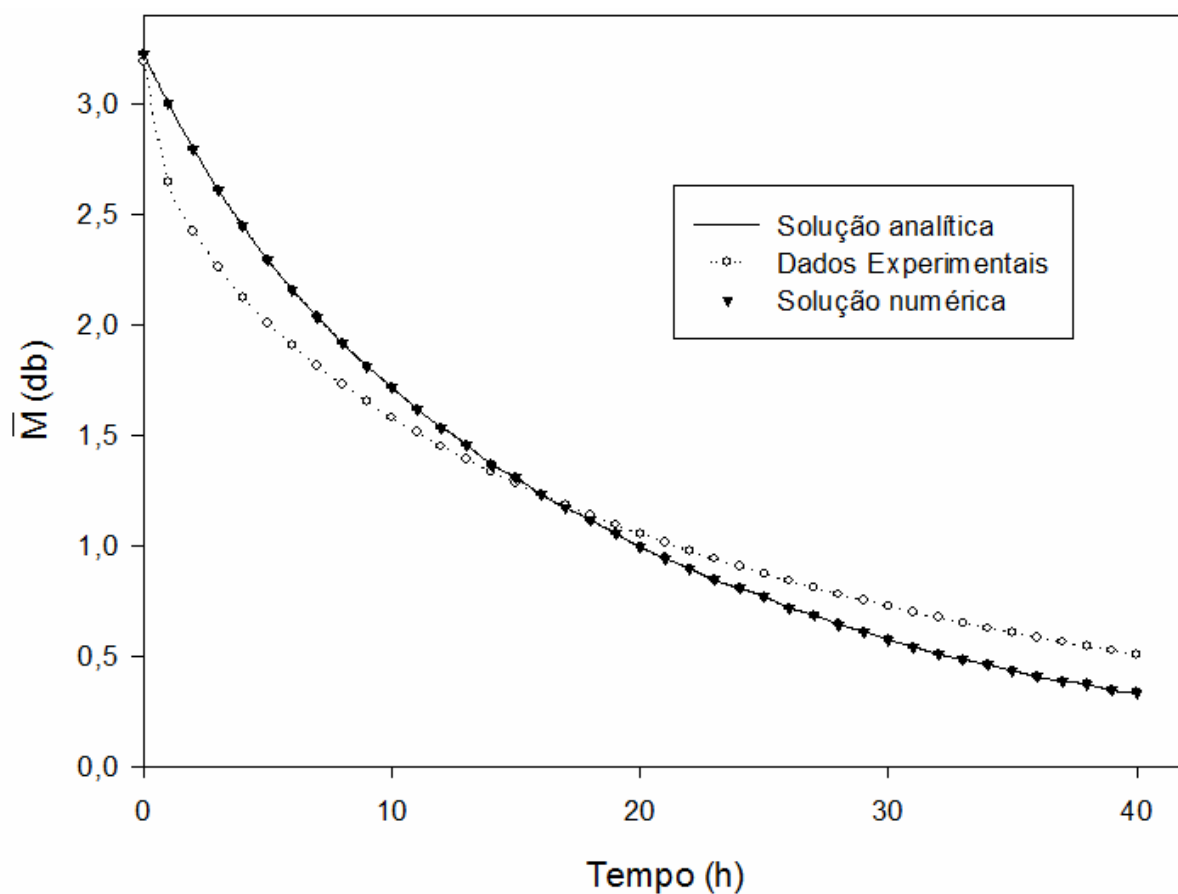


FIGURA 2 – Valores da umidade média considerando-se os dados experimentais apresentados em AMENDOLA & QUEIROZ (2007), solução analítica e solução numérica convergida.

Verifica-se nesta figura 2 que a solução numérica converge para a solução analítica, sendo que a proposta do presente trabalho é analisar a taxa de convergência da solução numérica. Para a quantificação da convergência da solução numérica em relação à umidade média, utilizou-se somatório dos erros ao quadrado para a média (SEQM), considerando-se os valores de umidade médias calculados de uma em uma hora até às 40 horas de operação, conforme a Eq. (21):

$$SEQM = \sum_{i=1}^{40} (\overline{M}_n(i) - \overline{M}_a(i))^2 \quad (21)$$

onde $\overline{M}_n(i)$ é o valor calculado numericamente e $\overline{M}_a(i)$ é o valor calculado analiticamente, ambos para o tempo igual a “i” horas. Os resultados obtidos utilizando-se as duas metodologias testadas neste trabalho são apresentados na Tabela 1.

TABELA 1 – Valores de SEQM, para as duas metodologias empregadas, calculados para diversos números de pontos de discretização.

Número de pontos	SEQM para Metodologia 1	SEQM para Metodologia 2
3	1,16	0,948
4	0,212	0,180
5	0,0566	0,0474
10	$11,4 \times 10^{-4}$	$7,89 \times 10^{-4}$
30	$11,5 \times 10^{-6}$	$8,23 \times 10^{-6}$
50	$1,45 \times 10^{-6}$	$1,05 \times 10^{-6}$
70	$3,71 \times 10^{-7}$	$2,71 \times 10^{-7}$

Observa-se na Tabela 1 que, para todos os números de pontos analisados, o somatório dos erros ao quadrado para o valor médio de umidade na banana para a Metodologia 2 é inferior ao obtido pela metodologia 1. Ressalta-se, entretanto, que quando se compara os valores médios, esta diferença não é muito pronunciada. Mesmo assim, pode-se concluir que a metodologia 2 fornece valores mais precisos do que aqueles conseguidos pela metodologia 1. Quando são comparados os perfis de umidade numérico e analítico, pode-se verificar que o maior erro é obtido no ponto central da banana. Sendo assim, uma análise da variação com o tempo do valor da umidade neste ponto foi realizada e os resultados obtidos são apresentados nas figuras 3 e 4.

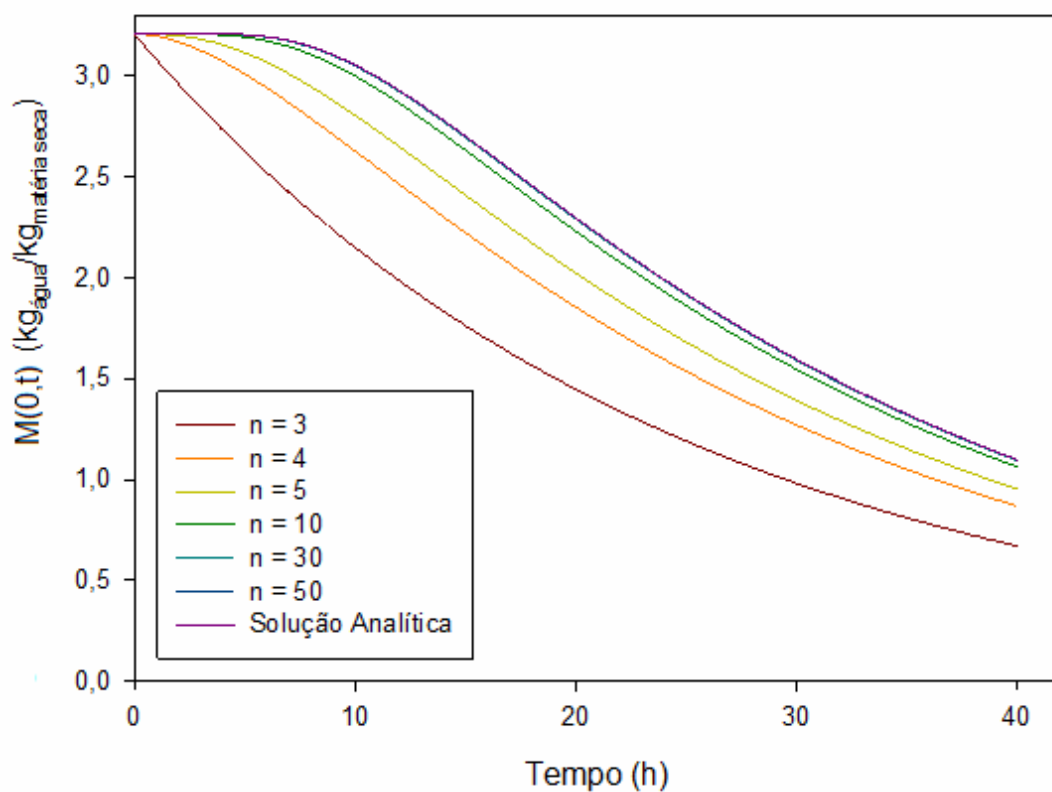


FIGURA 3 – Análise da convergência da malha utilizando a Metodologia 1.

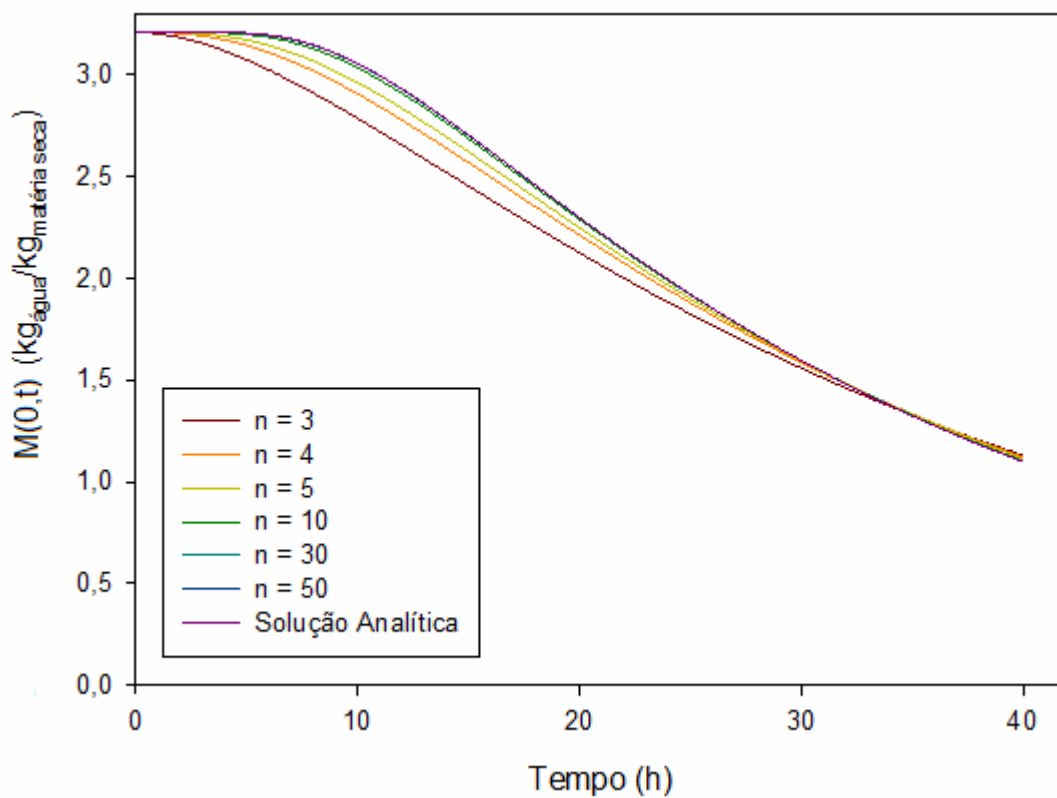


FIGURA 4 – Análise da convergência da malha utilizando a Metodologia 2.

A comparação entre os perfis temporais da umidade no centro da banana, apresentados nas figuras 3 e 4, permite concluir que a metodologia 2 apresentou uma convergência muito mais rápida da malha do que a obtida pela metodologia 1. Para confirmar este resultado, o valor do somatório dos erros das soluções numéricas para a umidade no centro da banana (SEQR0) é calculado conforme apresentado na Eq. (22):

$$SEQR0 = \sum_{i=1}^{40} (M_n(0,i) - M_a(0,i))^2 \quad (22)$$

onde $M_n(0,i)$ é o valor calculado numericamente da umidade para o centro da banana ($r=0$) no tempo igual a “i” horas e $M_a(0,i)$ é o valor calculado por meio da solução analítica, apresentada na Eq. (5), da umidade para o centro da banana ($r=0$) no tempo igual a “i” horas.

Utilizando-se a Eq. (22), foram calculados os valores de SEQR0 para diferentes números de pontos na malha, em cada uma das metodologias apresentadas, sendo que o resultado obtido é apresentado na Figura 4.

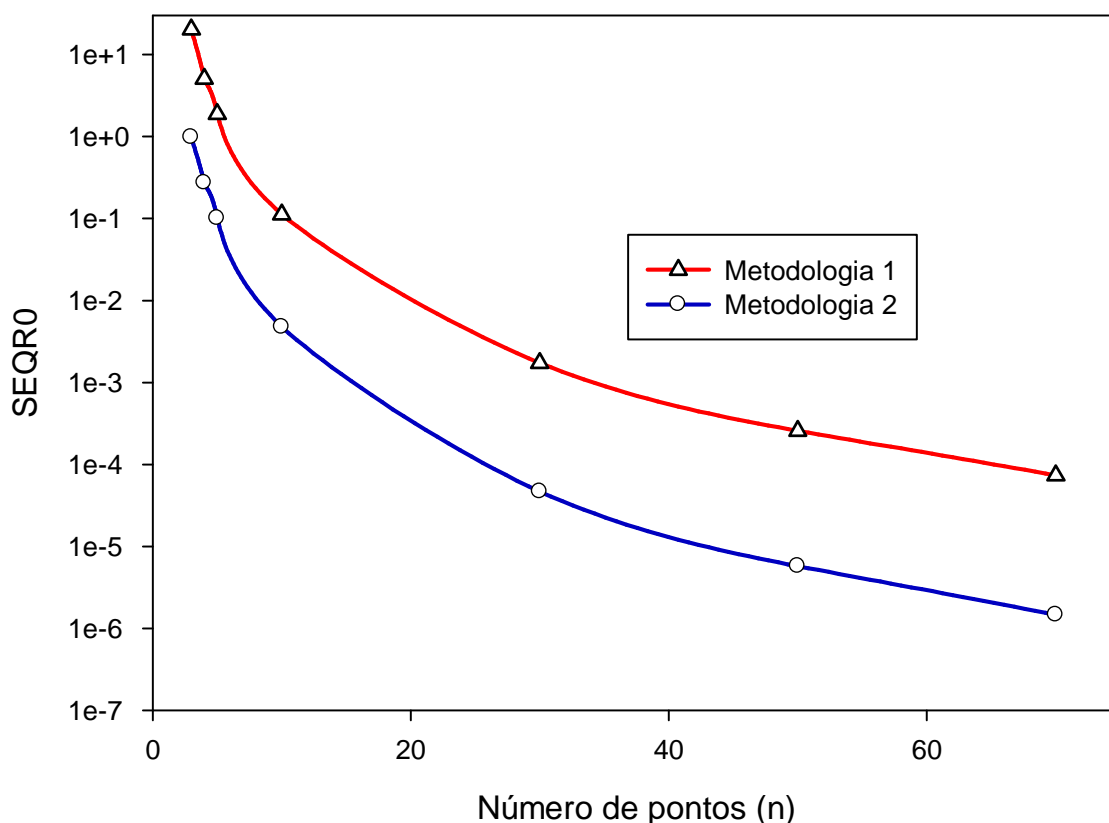


FIGURA 5 – Comparação entre a convergência da malha em relação ao número de pontos utilizados para as Metodologias 1 e 2.

A análise da figura 5 confirma a conclusão de que, para o valor da umidade no centro da banana, a metodologia 2 possibilitou uma

convergência muito mais rápida da malha de discretização, quando comparada com a metodologia 1, proposta por AMENDOLA & QUEIROZ (2007). Observa-se que para alguns pontos a diferença em SEQR0 é de quase duas ordens de grandeza. Ressalta-se aqui a importância da análise deste ponto, já que o mesmo apresenta os maiores valores de umidade durante todo o processo de secagem.

CONCLUSÕES

No presente trabalho apresentam-se e discutem-se duas metodologias para a discretização por diferenças finitas da equação da difusão em coordenadas cilíndricas, considerando-se a simetria radial e condição de contorno do primeiro tipo para o valor máximo do raio. Os resultados são comparados com a solução analítica do problema para análise da convergência da malha. A diferença entre as duas metodologias reside no tratamento da condição de contorno para o valor nulo do raio (condição de simetria). Na primeira, a derivada nula é aproximada por diferenças finitas para frente, sendo o valor da umidade no contorno explicitado como igual ao do primeiro ponto interno de discretização. Na segunda metodologia, própria equação da difusão é resolvida, já que o ponto de contorno no domínio radial corresponde na verdade num ponto interno do ponto de vista físico, o que permite definir o valor da umidade num ponto anterior ao do contorno (fora da malha de discretização) como sendo idêntico ao primeiro ponto interno da malha. Nesta segunda metodologia, tem-se uma indeterminação gerada por uma razão de dois valores nulos, que é resolvida utilizando-se a regra de L'Hôpital.

Os resultados obtidos neste trabalho indicam que a segunda metodologia é mais precisa (fornece valores mais próximos ao analítico), tanto quando se comparam os valores médios da variável dependente quanto quando se comparam os perfis desta variável ao longo do tempo e do espaço. A diferença é mais significativa para o ponto central, aonde a diferença de erro entre as duas metodologias chega a quase duas ordens de grandeza. Ressalta-se que a análise deste ponto é muito importante já que o mesmo apresenta o mais alto valor da umidade durante todo o processo de secagem e se o mesmo atingir a umidade desejada garante-se que todos os demais pontos estarão ainda mais secos.

Os resultados apresentados indicam que a metodologia 2 é mais eficiente do ponto de vista computacional, pois permite uma convergência mais rápida da malha de discretização e deve ser empregada sempre que a condição de simetria estiver presente no centro de problemas em coordenadas cilíndricas. Este resultado se faz ainda mais importante na solução de problemas em que o coeficiente de difusão for função da variável dependente, de modo que o problema não tenha mais solução analítica e desta forma só possa ser resolvido numericamente.

AGRADECIMENTOS

À FAPES (Fundação de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo) pelo auxílio financeiro (concessão de bolsas de iniciação científica).

REFERÊNCIAS

AMENDOLA, M.; QUEIROZ, M. R. Mathematical methodologies for calculating the mass diffusion coefficient of bananas during drying. **Revista Brasileira de**

Engenharia Agrícola e Ambiental, v.11, n.6, p.623–627, 2007.

BOERI, C.; SILVA, F.N.; FERREIRA, J.; SARAIVA, J.; SALVADOR, A. Predicting the drying kinetics of salted codfish (*Gadus Morhua*): semi-empirical, diffusive and neural network models. **International Journal of Food Science and Technology**, v. 46, p. 509–515, 2011.

BORGES, S. V.; MANCINI, M. C.; CORRÊA, J. L. G.; LEITE, J. Secagem de bananas prata e d'água por convecção forçada. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, v. 30, n. 3, p. 605-612, 2010.

CANO-CHAUCA, M.; RAMOS, A.; STRINGHETA, P.; MARQUES, J.; SILVA, P. Curvas de secagem e avaliação da atividade de água da banana passa. **Boletim do Centro de Pesquisa de Processamento de Alimentos**, v.22, n.1, p.121-132, 2004.

COSTA, A. R. S. **Sistema de secagem solar para frutos tropicais e modelagem da secagem de banana em um secador de coluna estática**. 2008. 169 f. Tese (Doutorado) – Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 2008.

CRANK, J. *The mathematics of diffusion*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1975. 414p.

MUNDADA, M.; HATHAN, B. S.; MASKE, S. Mass transfer kinetics during osmotic dehydration of pomegranate arils. **Journal of Food Science**, v. 76, p. 31–39, 2011.

OETTERER, M.; REGITANO-D'ARCE, M. A. B.; SPOTO, M. H. F. *Fundamentos de ciência e tecnologia de alimentos*. Barueri: Manole, 2006. 612 p.

PAULO JR., C. A.; CORRÊA, P. C. Comparação de modelos matemáticos para descrição da cinética de secagem em camada fina de sementes de feijão. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v.3, n.3, p.349-353, 1999.

QUEIROZ, M. R.; NEBRA, S. A. Soluções analíticas e numéricas do modelo de difusão à secagem de bananas. **Engenharia Agrícola**, v.17, n.1, p.74-83, 1997.

SILVA, W. P.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, C. D. P. S. Numerical simulation of the water diffusion in cylindrical solids. **International Journal of Food Engineering**, v. 4, n. 2, 2008.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, C. M. D. P. S.; GOMES, J. P. Determination of effective diffusivity and convective mass transfer coefficient for cylindrical solids via analytical solution and inverse method: application to the drying of rough rice. **Journal of Food Engineering**, 98, 302–308, 2010.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S. Determination of the effective diffusivity via minimization of the objective function by scanning: application to drying of cowpea. **Journal of Food Engineering**, v. 95, p. 298-304, 2009.

VEGA-GÁLVEZ, A.; AYALA-APONTE, A.; NOTTE, E.; DE LA FUENTE, L.; LEMUS-MONDACA, R. Mathematical modeling of mass transfer during convective
ENCICLOPÉDIA BIOSFERA, Centro Científico Conhecer - Goiânia, v.9, N.16; p.2917 2013

dehydration of brown algae *Macrocystis Pyrifera*. **Drying Technology**, v. 26, p. 1610–1616, 2008.