



TEORIA GROSSA PARA O DECAIMENTO BETA: IMPACTOS DA FUNÇÃO DE FERMI NO CÁLCULO DAS TAXAS DE DESINTEGRAÇÃO NUCLEAR.

Roberto Claudino Ferreira¹, Alejandro Javier Dimarco².

1. Professor de Física da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia / Campus de Itapetinga e pós-graduando em Física Nuclear pela Universidade Estadual de Santa Cruz - Brasil. (roberto.fisica@bol.com.br).
2. Professor doutor de Física da Universidade Estadual de Santa Cruz - Brasil.

Recebido em: 04/05/2012 – Aprovado em: 15/06/2012 – Publicado em: 30/06/2012

RESUMO

Com o intuito do aperfeiçoamento dos modelos nucleares, sobre tudo a respeito da Teoria Grossa, este trabalho traz como proposta, uma investigação sobre qual das funções de Fermi disponíveis na literatura representa melhor a interação coulombiana entre núcleo e elétron no decaimento beta. Neste contexto, foram realizados os cálculos das taxas de decaimento beta para 94 núcleos com faixa de massa variando entre $46 < A < 70$, que são de interesse na fase da pré-supernova e por fim estes resultados foram comparados com os experimentais disponíveis na carta de núclídeos.

Palavras chave: Taxas, Decaimento Beta, Função de Fermi.

GROSS THEORY FOR BETA DECAY: IMPACTS OF THE FERMI FUNCTION OF THE CALCULATION OF RATES FOR NUCLEAR DISINTEGRATION.

ABSTRACT

With the aim of improvement of nuclear models, mostly about the Gross Theory, this work brings as proposed, an investigation into which of the Fermi functions available in the literature best represents the Coulomb interaction between nuclei and electrons in beta decay. In this context, the calculations were performed of beta decay rates for 94 cores mass range between $46 < A < 70$, which are of interest in the Pre-supernova and finally these results were compared to the available experimental letter of nuclides.

Keywords: Rates, Beta Decay, Fermi Function.

1- INTRODUÇÃO.

Desde o surgimento da Física nuclear, um dos grandes desafios desta área tem sido desenvolver modelos teóricos que consigam reproduzir o mais fielmente possível os resultados experimentais das várias reações que acontecem naturalmente. A Teoria Grossa consiste apenas de mais um modelo nuclear que surgiu na tentativa de suprir esta necessidade da ciência. Este modelo nuclear foi

proposto inicialmente por Takahashi e Yamada há uns 40 anos. Trata-se essencialmente de um modelo paramétrico para taxas de desintegração nuclear, que combinou argumentos de partícula independente associada ao modelo do gás de Fermi, associados a argumentos estatísticos de um modo fenomenológico, a função da amplitude β do modelo da partícula independente é convolucionada com a densidade de níveis do modelo do gás de Fermi corrigidas para levar em conta o efeito de emparelhamento e de camadas.

A Teoria Grossa reproduz bem as taxas de desintegração nuclear e consequentemente a meia vida de muitos isótopos em condições terrestres, o que nos permite comparar com resultados experimentais e testar o modelo, mas a característica que este modelo mais chama a atenção é a sua capacidade de trabalhar com um grande número de núcleos de modo sistemático, o que facilita o trabalho computacional, vantagem esta que ainda não encontramos em outros modelos.

Visando aplicar o modelo Teoria Grossa em futuras pesquisas para o estudo de fenômenos astrofísicos, como por exemplo: na fase da pré-supernova, onde as reações nucleares de decaimento beta e captura eletrônica regem o destino desta fase da evolução estelar, optou-se neste trabalho pelo uso da Teoria Grossa para o Decaimento Beta (TGDB) que, com poucas modificações, pode ser aplicada à captura de elétrons. Para tanto será feito o uso da Teoria Grossa original com algumas poucas modificações.

O decaimento beta, segundo Chung (2001), é a reação nuclear pelo qual um núcleo instável pode se transformar em outro núcleo, mediante a emissão de uma partícula beta. Nesta reação temos invariavelmente quatro personagens: dois núcleos (pai e filho) e dois léptons (elétron e antineutrino). A interação responsável por este tipo de transição é a eletrofraca, que conserva o número leptônico, o número hádrônico, a carga e a massa nuclear. Nesta reação deve ser levada em consideração a interação coulombiana entre o elétron e o núcleo, visto que, o elétron é uma partícula com carga. Esta interação é representada pela chamada função de Fermi. Esta função é o foco de investigação deste trabalho.

Com o passar dos anos, muitos pesquisadores tem proposto melhorias na Teoria Grossa, que é o caso da Teoria Grossa de 2ª Geração (GT2) proposta por (Kondon et al., 1990) e a outra versão é a Teoria Semi-Grossa (BET) de autoria de (Tachibana et al., 1990). Com o intuito de contribuir na busca pela melhoria no cálculo das taxas e, como será mostrada na próxima seção, a equação para o cálculo das taxas de desintegração nuclear tem uma forte dependência da função de Fermi. Focou-se neste trabalho, como principal objetivo realizar uma investigação sobre qual das funções de Fermi disponíveis na literatura, que associada com a Teoria Grossa, mais contribui para calcular resultados das taxas mais próximos dos experimentais.

2- DESCRIÇÃO DO MODELO: TEORIA GROSSA PARA O DECAIMENTO BETA (TGDB).

A TGDB toma como ponto de partida a equação para as taxas de desintegração nuclear, que é dada por:

$$\lambda_{\beta} = \frac{m_e^5 c^4 g^2 |M(E)|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_1^{E+1} (E+1-E_e) E_e \sqrt{E_e^2 - 1} F(Z, E_e) dE_e. \quad (1)$$

Aqui, λ_{β} é a taxa de decaimento beta que tem unidade de 1/s, m_e é a massa do elétron, c é a velocidade da luz, g é a constante de acoplamento fraca, $M(E)$

representa o elemento de matriz nuclear, \hbar está relacionado com a constante de Planck, (E) representa a energia de desintegração, (E_e) é a energia do elétron e $F(Z, E_e)$ é a função de Fermi. Para esta última detalharemos na próxima seção quais as expressões que serão testadas.

Na equação (1), as energias estão todas adimensionalizadas e a integral desta equação é chamada de: função de Fermi integrada, que daqui por diante chamaremos de $f(E)$. Então a equação para a TGDB segundo Takahashi e Yamada (1969), fica:

$$\lambda_\beta = \frac{m_e^5 c^4 g^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 |M(E)|^2 f(-E) dE. \quad (2)$$

Aqui, Q é a diferença de massa da transição em MeV, que segundo Chung (2001) é dado por: $Q_\beta = M_P c^2 - M_F c^2 - m_e c^2$, (3)

onde M_P é a massa do núcleo pai, M_F é massa do núcleo filho. Para estes foram usados dados experimentais extraídos da carta de nuclídeos.

Ainda na equação (2), o termo $f(-E)$ é função de Fermi integrada. No decaimento beta, a transição ocorre do núcleo pai (estado inicial), para o núcleo filho (estado final), temos então que a energia da transição é dada por $(E_i - E_f)$, aqui a função de Fermi integrada aparece em função de $(-E)$, pelo fato da Teoria Grossa integrar nos estados finais de energia $(-E_f)$. Assim a integral da função de Fermi fica:

$$f(-E) = \int_1^{-E+1} (-E + 1 - E_e) E_e \sqrt{E_e^2 - 1} F(Z, E_e) dE_e. \quad (4)$$

O decaimento beta pode ocorrer por cinco transições mais conhecidas, que segundo Takahashi (1971) são as transições primeiras proibidas de classe 0, classe 1 e classe 2, a transição de Fermi e a Transição de Gamow-Teller. Neste caso as transições proibidas são na verdade as menos prováveis, por este motivo seus valores são irrelevantes em comparação com as duas últimas transições. Então, daqui por diante serão consideradas apenas as transições de Fermi e Gamow-Teller. Logo a taxa de decaimento beta deve ser escrita como:

$$\lambda_\beta = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 [g_V^2 |M_F(E)|^2 + [g_A^2 3 |M_{GT}(E)|^2] f(-E) dE. \quad (5)$$

Sendo $g_V = 1,4 \times 10^{-49} \text{ erg.cm}^3$ e $g_A = -1,2 g_V$, o 3 no elemento de matriz nuclear de Gamow-Teller se deve ao seu spin que é tridimensional. Trabalhando estes valores

com as outras constantes temos que: $G_F = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} g_V^2 \cong 1,1 \times 10^{-4} \frac{1}{s}$ (6)

$$G_{GT} = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} 3g_A^2 \cong 4,8 \times 10^{-4} \frac{1}{s} \quad (7)$$

logo:

$$\lambda_\beta = \int_{-Q}^0 [G_F |M_F(E)|^2 + [G_{GT} |M_{GT}(E)|^2] f(-E) dE. \quad (8)$$

Quanto ao elemento de matriz nuclear foi usada a regra da soma proposta por (Takahashi, 1971), que por definição fica: $|M_\Omega(E)|^2 = \overline{|\Psi_f \Omega \Psi_i|^2} \rho(E)$, (9) onde Ω representa o operador de Fermi ou de Gamow-Teller, e $\rho(E)$ é a densidade de níveis finais de energia. A parametrização da equação (9) é dada por:

$$|M_\Omega(E)|^2 = \int_{\varepsilon_0}^\varepsilon D_\Omega(E, \varepsilon) \frac{dN}{d\varepsilon} W(E, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (10)$$

onde ε é a energia do nucleon, que no caso do decaimento beta é o nêutron simbolizado na equação por N, o qual é tomado como uma partícula independente, $D_{\Omega}(E, \varepsilon)$ é a função de distribuição da probabilidade de transição da partícula independente, para este último será negligenciado a dependência da energia do nucleon, já que a transição ocorre independente desta energia. Para esta função existe como proposta a escolha de três opções: a do tipo gaussiana, lorentziana e exponencial. Neste trabalho foi usada a do tipo gaussiana, visto que, segundo Samana et al. (2008) é a que dá melhores resultados, logo:

$$D_{\Omega}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Omega}} e^{-\frac{(E-E_{\Omega})^2}{2\sigma_{\Omega}^2}} \quad (11)$$

onde, E_{Ω} é a energia de ressonância e σ_{Ω} é o desvio padrão, dadas em MeV, as quais podem ser atribuídas à força coulombiana. Para a transição de Fermi, estas grandezas podem ser escritas como: $E_{\Omega} = E_F = E_C = \pm \left(1,44ZA^{-\frac{1}{3}} - 0,7825\right)$ (12)

$$\sigma_F = \sigma_C = 0,157ZA^{-\frac{1}{3}}, \quad (13)$$

sendo Z, o número de prótons do núcleo pai. Para transição de Gamow-Teller foi usada a estimativa proposta por (Nakayama et al., 1982) e também por (Samana et al., 2008), sendo E_{GT} e σ_{GT} , medidas em MeV, onde:

$$E_{GT} = E_F + 26A^{-\frac{1}{3}} - \frac{18,5(N-Z)}{A}, \quad (14)$$

$$\sigma_{GT} = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_N^2}. \quad (15)$$

Para o parâmetro de ajuste σ_N usou-se o mesmo método usado por (Samana et al., 2008). Em relação à densidade de níveis do nucleon independente, tem-se que:

$$\frac{dN}{d\varepsilon} = N \left[1 - \left(1 - \frac{Q+E}{\varepsilon_F} \right) \right], \quad (16)$$

onde ε_F é a energia de Fermi do nucleon independente em MeV, dada por:

$$\varepsilon_F = \frac{76,52}{M_n^*} \frac{1}{r_o^2} \left(\frac{N}{A} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (17)$$

aqui r_o é o raio do nucleon dado por: $r_o = 1,25 \left(1 + 0,65A^{-\frac{2}{3}} \right)$, M_n^* é a massa efetiva do nucleon e M_n a massa do nucleon, cuja razão é dada por: $\frac{M_n^*}{M_n} = 0,6 + 0,4A^{-\frac{1}{3}}$.

Lembrando que todas as energias descritas acima devem ser adimensionalizadas.

Ainda na equação (10) temos o termo $W(E, \varepsilon)$, que trata-se da probabilidade de estados finais (grau de vacância), que para o caso deste trabalho, será 1, já que trata-se de uma transição num modelo cuja superfície é do tipo degrau e plana (Takahashi e Yamada, 1969). Por fim a equação para a taxa de decaimento beta por meio da Teoria Grossa fica:

$$\lambda_{\beta} = \int_{-Q}^0 [G_F D_F(E) + G_{GT} D_{GT}(E)] N \left[1 - \left(1 - \frac{Q+E}{\varepsilon_F} \right) \right] f(-E) dE. \quad (18)$$

Para encontrar a meia vida temos:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T^{(1/2)}} \quad (19)$$

logo:

$$T^{(1/2)} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (20)$$

3- METODOLOGIA.

Com o uso da linguagem Fortran foi desenvolvida uma modelagem computacional da Teoria Grossa para o Decaimento Beta, usando a referência original deste modelo, mas com algumas modificações, a saber:

Foram usados dados experimentais de massa retirados da carta de núclídeos para calcular os valores de Q na equação (3), foi aplicada a função gaussiana para a função da distribuição da probabilidade de transição do nucleon independente dada pela equação (11), em relação ao parâmetro de ajuste σ_N para a transição de Gamow-Teller, foi levado em consideração o método proposto por (Samana et al., 2008). Foram realizados os cálculos das taxas de decaimento beta para 94 isótopos das famílias do ferro, cobalto, níquel, manganês, cromo, cobre, titânio e escândio, englobando todos os isótopos destas famílias que decaem por meio do decaimento beta, os quais apresentam massa variando entre $46 < A < 70$. Estes núcleos foram escolhidos pelo fato da maioria estar entre os mais abundantes na fase da pré-supernova, que é alvo de estudos futuros. Além das modificações citadas acima, foram aplicadas alternadamente três funções de Fermi relacionadas abaixo, e por fim foi feito uma comparação dos resultados deste trabalho com os resultados experimentais de meia vida disponíveis na carta de núclídeos.

A primeira função de Fermi usada é a que mais comumente se aplica em pesquisas astrofísicas, aplicada inclusive em trabalhos de grande relevância como (Aufderheide et al., 1990). Os resultados desta modelagem foram chamados de TGDB1. A função já está adimensionalizada e escrita em função das energias, a qual é dada por:

$$F(Z, E_e) = \frac{|\Psi_{coulombiana}|^2}{|\Psi_{livre}|^2} \quad (21)$$

$$F(Z, E_e) = 2(1 + \gamma) \left(\frac{(0,511)2R\sqrt{E_e^2 - 1}}{c\hbar} \right)^{-2(1-\gamma)} \exp(\pi v) \frac{|\Gamma(\gamma + iv)|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2} \quad (22)$$

Onde $\gamma = [1 - (Z\alpha)^2]^{1/2}$, $v = \frac{Z\alpha E_e}{\sqrt{E_e^2 - 1}}$, R é o raio nuclear dado por: $R = r_o A^{1/3}$ e

$\alpha = \frac{1}{137}$ é a constante de estrutura fina e Γ é função gama.

A segunda função de Fermi usada foi uma aproximação proposta pelos autores da Teoria Grossa original, a qual pode ser encontrada no artigo "Gross Theory of Nuclear β -Decay" de (Takahashi e Yamada, 1969), dada por:

$$f(Z, E_o) \approx a(Z)E_o^3 + \frac{1}{g(Z, E_o)} E_o^4 + c(Z)E_o^5 + d(Z, E_o), \quad (23)$$

válida para $E_o \geq 0$, onde $E_o = -E$, e o Z é número de prótons. E os outros termos são:

$$a(Z) = 1,52 \times 10^{-2} Z + 6,40 \times 10^{-6} Z^3 + 8,50 \times 10^{-11} Z^5 + 1,70 \times 10^{-13} Z^7 + 2,50 \times 10^{-26} Z^{13}$$

$$c(Z) = 3,33 \times 10^{-2} Z \exp(3,11 \times 10^{-2} Z)$$

$$d(Z, E_o) = \frac{0,132 E_o^{7/2}}{1 + 2,805 E_o^5} \exp(-0,5Z)$$

$$g(Z, E_o) = b_1 + \left(\frac{E_o - b_3(Z)}{b_2(Z)} \right)^5$$

Com:

$$b_1(Z) = 5,26 \exp(-6,65674x10^{-3}Z - 6,41863x10^{-5}Z^3 - 7,00193x10^{-6}Z^3 + 4,74649x10^{-8}Z^4)$$

$$b_2(Z) = 9,80 - 7,30x10^{-2}Z - 1,28x10^{-3}Z^2 + 2,84x10^{-5}Z^3$$

$$b_3(Z) = [2 \exp(-0.5Z)] + 8,5 + 6x10^{-4}Z^2$$

Esta parametrização acima diz respeito a todo integrando no qual a função de Fermi se encontra, equação (4). Os resultados desta modelagem foram nomeados de TGDB2.

A terceira função de Fermi usada foi a proposta por (Chung, 2001) em seu livro: *“Introdução à Física Nuclear”*, que escrita de forma adimensional fica:

$$F(Z', E_e) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - \exp(-2\pi\eta)}, \quad (24)$$

onde:

$$\eta = \frac{Z'e^2m_e}{4\pi\epsilon_0\hbar\frac{1}{c}\sqrt{E_e^2 - 1}(m_e c^2)}, \quad (25)$$

aqui Z' é a carga do núcleo filho.

Os resultados desta modelagem foram denotamos TGDB3.

4- RESULTADOS E DISCUSSÕES.

Foram realizados os cálculos das taxas para uma amostra de 94 núcleos, estes resultados estão apresentados nas Figuras (1), (2) e (3). Tomou-se o logaritmo da razão entre a meia vida calculada pela meia vida experimental, portanto, quanto mais próximo o resultado calculado estiver do experimental, mais próximo da linha pontilhada, o resultado aparecerá. Para a análise de dados, foram considerados os resultados como ideais àqueles que se encontrarem dentro da mesma ordem de grandeza, intervalo [-1,1], os quais aparecem entre as linhas sólidas, ou no máximo maiores em uma ordem de grandeza, intervalo entre [-2,2].

Em relação a TGDB1, percebe-se que os resultados para 73% dos 94 núcleos incluídos na amostra, se encontram dentro da mesma ordem de grandeza dos resultados experimentais e os 27% dos núcleos que apresentaram resultados fora desta faixa, 20% se encontram com uma ordem de grandeza acima ou abaixo dos experimentais, apenas 7% não são ideais.

A TGDB2 apresentou 44% dos resultados dos 94 núcleos incluídos na amostra dentro da mesma ordem de grandeza dos resultados experimentais, 33% apresentaram resultados com uma ordem de grandeza acima ou abaixo dos experimentais e 23% das taxas não são ideais.

Já a TGDB3 apresentou apenas 23% dos resultados dos 94 núcleos dentro da mesma ordem de grandeza dos resultados experimentais e 18% com uma ordem de grandeza acima ou abaixo, 53% das taxas não são ideais.

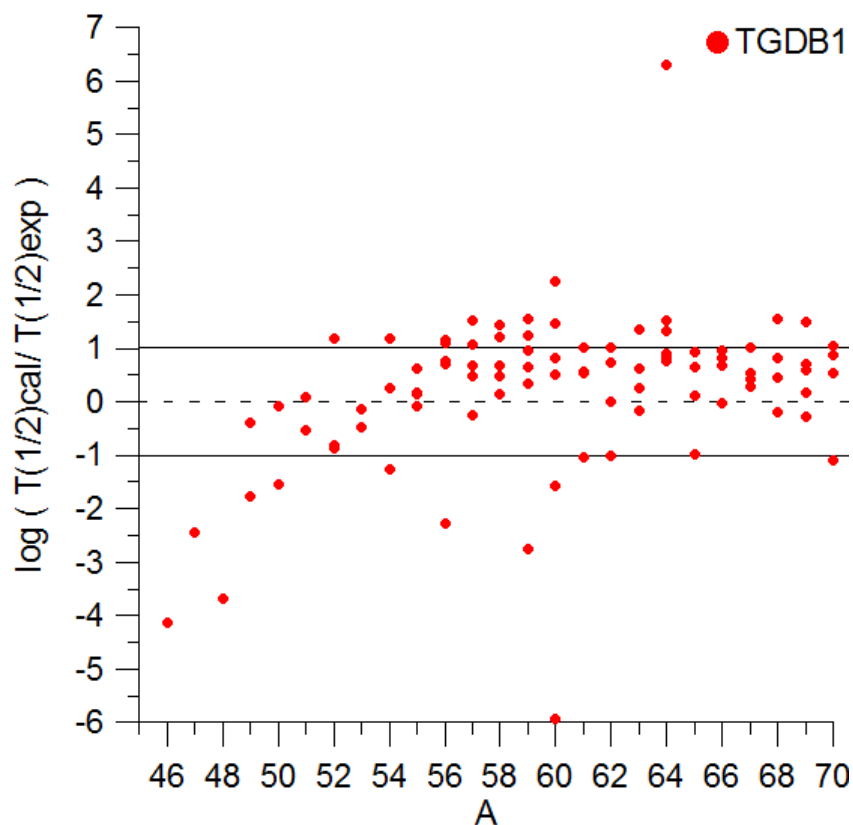


Figura 1: Logaritmo da razão entre a meia vida calculada e a experimental para 94 núcleos. Fonte: TGDB1, eq. (18) + eq. (22), experimentais: carta de núclídeos.

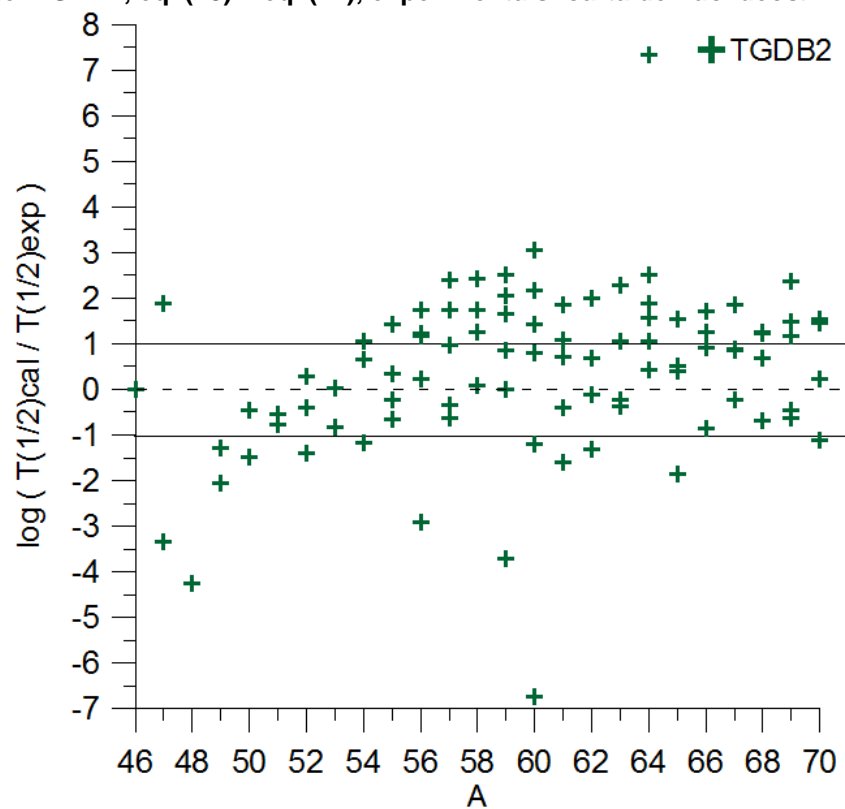


Figura 2: Logaritmo da razão entre a meia vida calculada e a experimental para 94 núcleos. Fonte: TGDB2, eq. (18) + eq. (23), experimentais: carta de núclídeos.

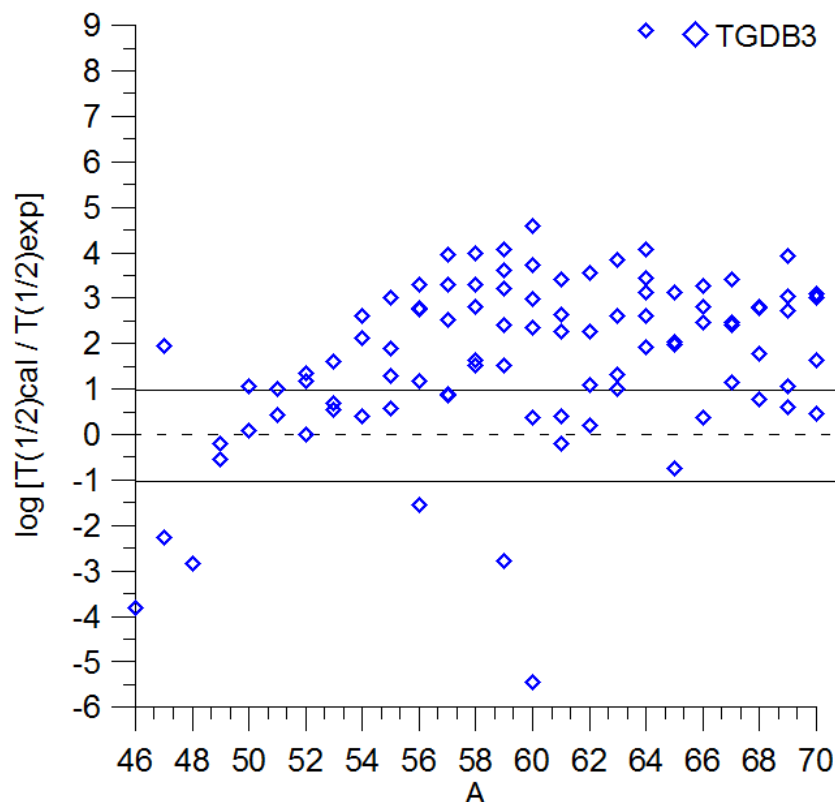


Figura 3: Logaritmo da razão entre a meia vida calculada e a experimental para 94 núcleos. Fonte: TGDB3, eq. (18) + eq. (24), experimentais: carta de núclídeos.

5- CONCLUSÃO.

A modelagem denominada TGDB1 na qual foi usada a função de Fermi da equação (22), apresentou os melhores resultados, onde apenas 7% das taxas não são ideais, superando a TGDB2 e TGDB3, as quais respectivamente apresentaram resultados com 23% e 53% das taxas fora da faixa ideal de valor.

6- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUFDERHEIDE, M. B.; BROWN, G. E.; KUO, T. T. S.; STOUT, D. B.; VOGEL, P. **Electron capture and beta-decay in presupernova stars**. *Astrophysical Journal*, Part 1, v. 362, p. 241-250, 1990. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/full/1990ApJ...362..241A>. Acesso em: 10 de Junho de 2010.

CHUNG, K. C. **Introdução à física nuclear**. Rio de Janeiro: ed. UERJ, 2001, 286p.
KONDON, T.; TACHIBANA, T.; YAMADA, M., **Improvement of the Gross Theory of β -Decay. I - Formalism** -. *Progress Theoretical Physics*. v. 74, n. 04, p. 708-724. 1990. Disponível em: <http://ptp.ipap.jp/link?PTP/74/708/>. Acesso em: 11 de Dezembro de 2010.

NAKAYAMA, K.; GALEÃO P. A.; KRMPOTIC F. **On the energetics of the Gamow-Teller resonances**. *Physics Letters B*. v. 114, n. 04, p. 217-221, 1982. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382904804>. Acesso em: 10 de Junho de 2010.

SAMANA, A. R.; BARBERO, A. J.; DUARTE, B.; DIMARCO, A. J.; KRMPOTIC, F. **The gross theory model for neutrino-nucleus cross-section.** New Journal of Physics. v. 10, n. 033007, 17p., 2008. Disponível em: <http://iopscience.iop.org/1367-2630/10/3/033007/>. Acesso em: 01 de Agosto de 2010.

TACHIBANA, T.; YAMADA, M.; YOSHIDA, M. **Improvement of the Gross Theory of β -Decay. II - one-particle strength function.** Progress of Theoretical Physics. v. 84, n. 04, p. 641-657, 1990. Disponível em: <http://ptp.ipap.jp/link?PTP/84/641/>. Acesso em: 29 de Junho de 2010.

TAKAHASHI, K. **Gross Theory of First Forbidden β -Decay.** Progress of Theoretical Physics. v. 45, n. 05, p. 1446-1492, 1971. Disponível em: <http://ptp.ipap.jp/link?PTP/45/1466/>. Acesso em: 29 de Junho de 2010.

TAKAHASHI, K.; YAMADA, M. **Gross Theory of Nuclear β -Decay.** Progress of Theoretical Physics. v. 41, n. 06, p. 1470-1503, 1969. Disponível em: <http://ptp.ipap.jp/link?PTP/41/1470/>. Acesso em: 29 de Junho de 2010.