

UM SETOR ESPECIAL GENERALIZADO DA EQUAÇÃO DO OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO E AMORTECIDO

Clodoaldo Valverde^{†‡} e Heibbe Cristhian B. de Oliveira¹

[†] Professor Mestre da *Universidade Paulista (UNIP)*, 74845-090 Goiânia, GO, Brasil.

[‡] Professor Mestre da *Universidade Estadual de Goiás (UEG)*, 75001-970, Anápolis, GO, Brasil. (valverde@ueg.br)

¹ Professor Doutor do Instituto de Química, *Universidade de Brasília (UnB)*, 70919-970, Brasília, DF, Brasil. (heibbe@unb.br)

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma generalização da solução de um oscilador harmônico amortecido para o caso supercrítico (OHAS). Este trabalho foi incentivado a dar continuidade à generalização de um setor especial do Oscilador Harmônico Simples proposto por Ichiba e colaboradores (ICHIBA, 1999). Desta forma, propomos uma equação q-generalizada para o OHAS, bem como, sua solução geral baseada em potências de funções hiperbólicas.

PALAVRAS-CHAVE: oscilador, funções hiperbólicas

A GENERALIZED SPECIAL SECTOR OF THE DAMPING HARMONIC OSCILLATOR EQUATION

ABSTRACT

In this paper we present a generalization of the solution of a forced and damping harmonic oscillator for the supercritical case (DHOS). This work was stimulated to give continuity to the generalization of a special sector of the Simple Harmonic Oscillator proposed by (ICHIBA, 1999). Therefore, we propose a q-generalized equation for the DHOS as well as your general solution based in powers of hyperbolic functions.

KEYWORDS: oscillator, hyperbolic functions.

INTRODUÇÃO

Há uma grande quantidade e variedade de fenômenos físicos que são bem representados por equações diferenciais de segunda ordem (SYMON, 1982). Na verdade, a maioria das equações diferenciais que descrevem situações físicas é de, no máximo, segunda ordem, sejam ordinárias ou parciais. Um destes sistemas é o oscilador harmônico o qual é um sistema fundamental em física, tendo um grande número de aplicações tanto na física clássica quanto na física quântica. A importância do oscilador harmônico está no fato de que as equações similares são encontradas em grande variedade de problemas de física. Em quase todos os casos do movimento unidimensional, em que a função potencial $V(x)$ tem um ou mais pontos de mínimo, o movimento da partícula para pequenas oscilações em torno desses pontos de mínimo seguem a equação do oscilador harmônico simples.

Praticamente qualquer problema que envolva vibrações mecânicas reduz-se

a um oscilador harmônico, desde que as amplitudes de pequenas vibrações também estejam envolvidas, isto é, quando não ultrapassado o limite elástico do material. O movimento de estiramento de molas e membranas, bem como o de vibrações sonoras num gás contido num recipiente fechado ou num sólido, resultam em alguns dos denominados modos normais de vibração, cada um deles se comportando, de muitas maneiras, semelhante a um oscilador harmônico independente. Um circuito elétrico contendo um indutor de indutância L , um resistor de resistência R e condensador de capacitância C em série, e sujeito a uma força eletromotriz aplicada $E(t)$ satisfaz a equação:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t),$$

onde q é a carga no condensador e dq/dt é a corrente que flui no circuito. Esta equação é idêntica em forma à equação do oscilador harmônico forçado e amortecido, como veremos adiante. Os primeiros trabalhos sobre circuitos elétricos foram realizados levando-se em conta a sua analogia com o problema mecânico correspondente. Hoje em dia, a situação, muitas vezes, apresenta-se invertida, isto é, os engenheiros mecânicos e acústicos empregam métodos simples e efetivos desenvolvidos por engenheiros eletricitistas para resolver problemas de vibrações (SYMON, 1982; HAGEDORN, 1984; WOLFRAM, 1996). A teoria de oscilações elétricas numa linha de transmissão ou numa cavidade é matematicamente similar ao problema da corda vibrante ou da cavidade de ar ressonante.

A Mecânica Quântica relacionada ao átomo pode ser colocada de forma matematicamente idêntica à teoria de osciladores harmônicos. É bem sabido que a quantização do oscilador clássico unidimensional representou uma chave para a solução de importantes problemas em física quântica. As aplicações do OHS estendem-se por diferentes áreas do conhecimento. Em química, o desenvolvimento da Mecânica Molecular tendo como base que todas as interações ligadas dos sistemas moleculares possam ser descritas por meio da Lei de Hooke. Neste caso, define-se um potencial harmônico para os comprimentos de ligação, ângulos de ligação e ângulos diedrais. Desta forma, podemos perceber que o estudo e aplicações dos osciladores harmônicos ainda é um tema atual de interesse acadêmico.

O desenvolvimento de métodos matemáticos visam facilitar a resolução de sistemas físicos lineares e não-lineares (HAROLD, 1960). Assim este artigo exhibe uma classe generalizada de equações diferenciais e suas soluções. Baseado no trabalho de Ichiba e colaboradores (ICHIBA, 1999), propomos a generalização da equação diferencial vinda do problema do Oscilador Harmônico Forçado e Amortecido (OHFA), com intuito educacional e de aperfeiçoamento de softwares para testes inerentes aos mesmos.

Este trabalho está organizado como segue: Na próxima seção apresentamos a metodologia realizada na execução deste trabalho, onde na primeira subseção apresentamos brevemente a proposta de generalização do oscilador harmônico simples proposta por Ichiba e colaboradores (ICHIBA, 1999). Na subseção seguinte apresentamos nossa proposta de generalização para o oscilador harmônico forçado e amortecido para o caso supercrítico incluindo alguns resultados e discussões. A última seção é reservada às conclusões e considerações finais.

METODOLOGIA

- **Oscilador Harmônico Simples Generalizado (OHSG)**

O oscilador harmônico simples unidimensional é o sistema oscilante mais conhecido, profundamente estudado por ser um dos mais fáceis de se resolver. O exemplo mais simples é o de uma massa m presa a uma mola de constante elástica k que se move sem atrito cinético. A equação diferencial que descreve o OHS é ,

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (1)$$

onde

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

é a solução geral e ω representa a frequência angular e φ é a constante de fase.

Em seu trabalho, Ichiba e colaboradores definiram a seguinte equação diferencial q-generalizada para o oscilador harmônico simples:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 \left(x(t) - \frac{(q-1)}{q} x(t)^{\frac{q-2}{q}} \right) = 0, \quad (3)$$

sendo

$$x(t) = A \cos^q(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

sua solução q-generalizada. Vale a pena destacar que, para $q = 1$ na Eq.(3) obtemos a Eq.(1) do OHS e a Eq.(4) recai na Eq.(2). Para $q = 2$ na Eq.(3) temos OHS num campo externo constante e para $q = \infty$, temos a equação de Duffing (HAGEDORN, 1984).

- **Oscilador Harmônico Forçado e Amortecido Generalizado (OHFAG)**

O oscilador harmônico forçado e amortecido é um problema popular e importante no curso de mecânica em nível de graduação. Trata-se de um movimento de uma partícula de massa m sujeita à força harmônica $F = -kx$ (Lei de Hooke) e a uma força de atrito cinético agindo sobre o corpo e a uma força externa $F(t)$. Com uma aproximação, na maioria dos casos, pode-se supor que a força de atrito seja proporcional à velocidade, $f_{at} = b\dot{x}$. Assim, pela segunda Lei de Newton, temos:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = F(t), \quad (5)$$

que após divisão pela massa m da partícula, modifica-se para

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} x(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (6)$$

na qual γ é o parâmetro que indica a intensidade do amortecimento do movimento, enquanto ω é a frequência do oscilador não amortecido. Considerando $F(t) = 0$, a equação Eq.(5) recai na equação diferencial ordinária homogênea de segunda

ordem. Se $\gamma > \omega$, temos a equação do oscilador harmônico amortecido supercrítico (OHAS), cuja a solução é:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cosh(\Omega t + \phi), \quad (7)$$

onde

$$\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad e \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (8)$$

sendo m a massa do um corpo, b a viscosidade do meio e ϕ a constante de fase.

Usando a mesma idéia de Ichiba e colaboradores (ICHIBA, 1999), podemos definir então uma equação q-generalizada em uma forma diferencial, cuja a solução é do tipo hiperbólica. O método consiste na obtenção de uma expressão matemática, onde adiciona-se um termo à Eq.(6) formando uma nova equação generalizada.

Para um oscilador harmônico amortecido supercrítico submetido a ação de uma força externa aplicada do tipo:

$$F(t, x) = \xi^2 [2tg^2(\xi t + \varphi) - 1] x, \quad (9)$$

onde ξ é a freqüência e φ é a constante de fase. Nota-se a dependência explícita da força externa em termos da posição (dependência linear) e do tempo.

Vamos considerar que Ω dependa dos parâmetros interno do OHAS, como por exemplo: $\Omega = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, e $\gamma = \frac{b}{2m}$, assim a equação diferencial torna-se da seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} x(t) + \omega^2 x(t) = F(t, x), \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} x(t) + \omega^2 x(t) = \Omega^2 [2tg^2(\Omega t + \varphi) - 1] x(t), \quad (11)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} x(t) + (\omega^2 + \Omega^2 [1 - 2tg^2(\Omega t + \varphi)]) x(t) = 0, \quad (12)$$

a qual possui solução geral dada por::

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cosh^2(\Omega t + \varphi). \quad (13)$$

De modo similar, se a força $F(t, x)$ for:

$$F(t, x) = 2\Omega^2 [3tg^2(\Omega t + \varphi) - 1] x(t), \quad (14)$$

a equação diferencial toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} x(t) + (\omega^2 + 2\Omega^2 [1 - 3tg^2(\Omega t + \varphi)]) x(t) = 0, \quad (15)$$

cuja a solução geral é:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cosh^3(\Omega t + \varphi)$$

Assim, seguindo a estética indutiva podemos generalizar a força externa aplicada como sendo do tipo:

$$F(t, x) = \Omega^2(q - 1) [qtg^2(\Omega t + \varphi) - 1] x, \quad (16)$$

onde, a priori, $q \in \mathbb{R}$.

Desta forma podemos escrever a equação diferencial linear generalizada como:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} x(t) + [\omega^2 + f(t)] x(t) = 0, \quad (17)$$

onde $f(t) = \Omega^2(q - 1) [1 - qtg^2(\Omega t + \varphi)]$, cuja a solução geral generalizada da Eq.(17) é:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cosh^q(\Omega t + \varphi). \quad (18)$$

Destacamos que, quando $q = 1$ obtemos $f(t) = 0$ e a Eq.(17) recai na Eq. (6), que é a equação do oscilador harmônico amortecido supercrítico ($\gamma > \omega$) e a Eq.(18) recai na Eq.(7), que é a conhecida solução do OHAS. Considerando o caso de oscilador harmônico amortecido crítico (OHAC) $\gamma = \omega$ a função $f(t)$ se anula para todos os valores de q , fazendo com que a Eq.(17) recaia na Eq.(6), que é a equação diferencial do OHAC.

Na Figura 1 apresentamos um gráfico da posição $x(t)$ em função do tempo para diversos valores do parâmetro de deformação q . Por simplicidade, adotamos as constantes da Eq.(18) como: $A = \Omega = 1$, $\gamma = \sqrt{2}$ e $\varphi = 0$, obtendo assim:

$$x(t) = e^{-t} \cosh^q(t).$$

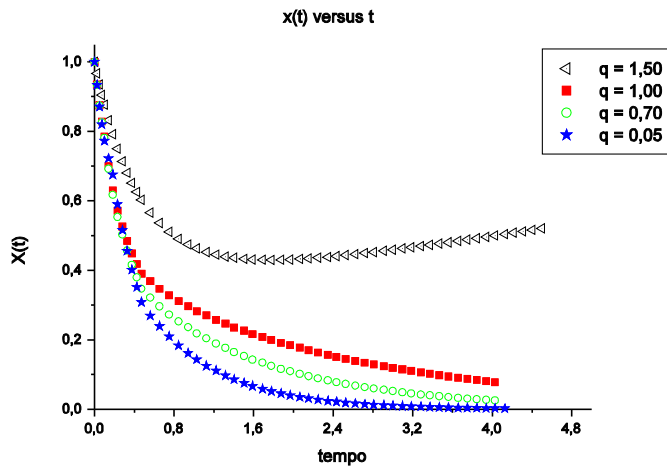


Figura 1: Gráfico da equação $x(t)$ em função do tempo para $q = 1,50$, $q = 1,00$, $q = 0,70$, $q = 0,05$.

Para $q = 1$ na Figura 1, temos o comportamento do OHAS (Eq. (6)) enquanto para $q > 1$ observa-se uma deformação do amortecimento, onde torna-se instável, tendendo à uma curva exponencial positiva. Para valores onde $q < 1$, podemos notar um aumento no amortecimento conforme pode ser observado nas Figuras 1 e 2. Observando o gráfico da figura 2, podemos dizer que para valores de $q \ll 1$ mais o amortecimento torna-se evidente. Já o gráfico da figura 3, podemos observar

que o parâmetro q compreendido entre $(0 < q < 1,5)$, a energia sofre dissipação total, agora para $q > 1,50$, voltamos a ter energia no sistema.

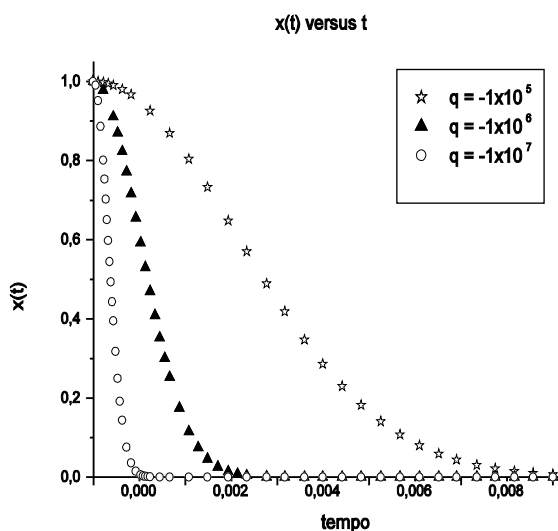


Figura 2: Gráfico da função $x(t)$ em função do tempo para $q = -1 \times 10^5$, $q = -1 \times 10^6$, $q = -1 \times 10^7$.

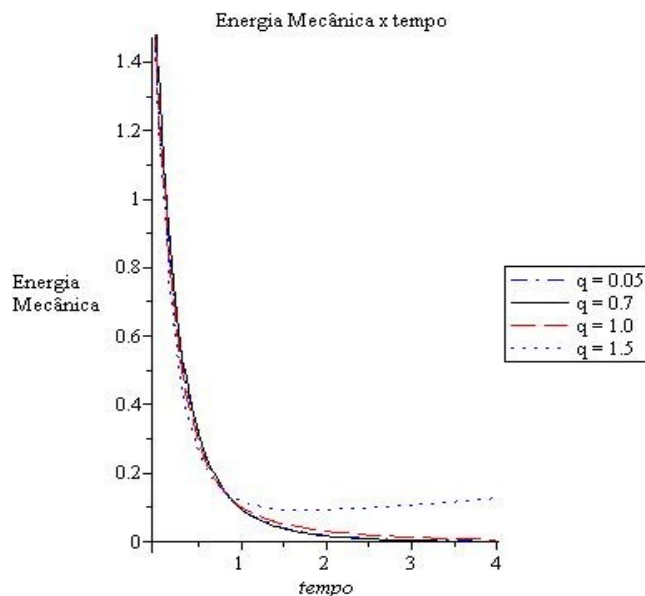


Figura 3: Gráfico da equação $x(t)$ em função do tempo para $q = 1,50$, $q = 1,00$, $q = 0,70$, $q = 0,05$.

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma proposta de deformação da solução de um oscilador harmônico amortecido para o caso supercrítico. Obtivemos portanto, a equação diferencial q -generalizada e analisamos o seu comportamento para valores próximos a 1 que caracteriza o (OHAS) bem como a conexão que ela tem com outras soluções do OHA. Embora a equação diferencial apresentada neste trabalho ser um tanto "exótica", nós temos na literatura vários exemplos de equações mais complexas do que esta, como por exemplo, em eletrodinâmica estocástica como pode ser visto nas referências (MARSHALL, 1963; BOYER, 1975; BOYER, 1975; FRANÇA, 1985). Fica portanto para um estudo futuro usar este tipo de solução para ajustar resultados experimentais, pois o parâmetro q é livre e desta forma se torna mais uma variável de ajuste tornando a solução proposta mais flexível.

AGRADECIMENTO

Os autores gostariam de agradecer ao Engenheiro B.S. Cintra pela leitura do texto e C. Valverde, gostaria de agradecer pelo apoio à Vice-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da UNIP .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYER, T. H., *Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation*, **Phys. Rev. D 11**, 790 (1975).
- BOYER, T. H., *General connection between random electrodynamics and quantum electrodynamics for free electromagnetic fields and for dipole oscillator systems*, **Phys. Rev. D 11**, 809, 1975.
- FRANÇA, H. M. e THOMAZ, M. T., *Forced harmonic oscillator with damping and thermal effects*, **Phys. Rev. D 31**, 1337, 1985.
- HAGEDORN, P., **Oscilações Não Lineares**. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, SP. 1984.
- HAROLD, T. D., **Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations**. Dover Publications, Inc., New York 1960.
- ICHIBA, C., ICHIBA, R., MAKI, J.N., *Um setor especial generalizado da equação do oscilador harmônico simples*, **Rev. Bras. Ens. Fis.**, vol **21**, n 4, 1999.
- MARSHALL, T. W., **Proc. R. Soc. London**, A **276**, 475 1963.
- SYMON, K. R., **Mecânica**. Editora Campus Ltda. Rio de Janeiro, RJ. 1982.
- WOLFRAM, S., **The Mathematica R. Book**, 3a. edição, Editora Cambridge University Press. USA, 1996.