

CURSO DE CÁLCULO

MÓDULO 1 - PRÉ- CÁLCULO

SUMÁRIO

Unidade 1- Conjuntos

- 1.1- Notação de Conjuntos**
- 1.2- Tipos de Conjuntos**
- 1.3- Operações com Conjuntos**
- 1.4- Resolução de Problemas**

Unidade 2- Conjuntos Numéricos

- 2.1- Números Naturais**
- 2.2- Números Inteiros**
 - 2.2.1- Múltiplos e Divisores**
 - 2.2.2- Algoritmo de Euclides**
 - 2.2.3- Valor Absoluto**
 - 2.2.4- Propriedades operacionais para adição e multiplicação de inteiros**
 - 2.2.5- Hierarquia das operações**
- 2.3- Números Racionais**
 - 2.3.1- Igualdade ou equivalência de frações**
 - 2.3.2- Soma e produto de números racionais**
- 2.4- Números Irracionais**
 - 2.4.1- O Número π**
- 2.5- Números Reais**
- 2.6- Números Complexos**

Unidade 3- Números Reais

- 3.1- Potências de um número real**
 - 3.1.1- Propriedades da Potenciação**
- 3.2- Raízes n-ésimas de números reais**
 - 3.2.1- Propriedades da Radiciação**
- 3.3- Potências racionais de números reais**
- 3.4- Potências reais de expoente real**
- 3.5- Propriedades das potências de expoente real**
- 3.6- Expressões numéricas**
- 3.7- Relação de ordem entre números reais**
- 3.8- Intervalos reais**
 - 3.8.1- Operações com Intervalos**
- 3.9- Inequações de uma variável real**
 - 3.9.1- Proposição Sobre Desigualdades de Números Reais**
- 3.10- Módulo de um número real**
 - 3.10.1- Propriedades básicas do módulo**
 - 3.10.2- Caracterização Geométrica do módulo**
- 3.11- Desigualdade triangular**
- 3.12- Inequações com módulo**

Unidade 4- Funções

- 4.1- Tipos de Funções**
- 4.2- Função Polinomial do 1º Grau ou Função Afim**
 - 4.2.1- Zeros da Função Afim**
 - 4.2.2- Crescimento e Decrescimento**
 - 4.2.3- Estudo do Sinal da Função Afim**
- 4.3- Função Polinomial do 2º Grau ou Função Quadrática**
 - 4.3.1- Gráfico da Função**
 - 4.3.2- Raízes ou Zeros da Função Quadrática**
 - 4.3.3- Estudo do Sinal da Função Quadrática**
- 4.4- Função Modular**
 - 4.4.1- Módulo ou Valor Absoluto de um Número**
 - 4.4.2- Equações Modulares**
 - 4.4.3- Inequações Modulares**
- 4.5- Função Exponencial**
 - 4.5.1- Introdução**
 - 4.5.2- Gráfico da Função Exponencial**
 - 4.5.3- Equações Exponenciais**
 - 4.5.4- Inequações Exponenciais**
 - 4.5.5- Resolução de Problemas envolvendo Função Exponencial**
- 4.6- Função Logarítmica**
 - 4.6.1- Introdução**
 - 4.6.2- Gráfico da Função Logarítmica**

- 4.6.2.1- Características do Gráfico da Função Logarítmica
- 4.6.3- Propriedades Operatórias dos Logaritmos
- 4.6.4- Equação Logarítmica
- 4.6.5- Inequação Logarítmica

Unidade 5- Trigonometria

- 5.1- Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo
- 5.2- Unidades de Medidas de Arcos
- 5.3- Ciclo Trigonométrico
- 5.4- Linhas Trigonométricas
- 5.5- Relações Trigonométricas
- 5.6- Funções Trigonométricas

Unidade 6- Geometria Analítica

- 6.1- Coordenadas em uma Reta
- 6.2- Distância Entre Dois Pontos da Reta
- 6.3- Coordenadas em um Plano
- 6.4- Distância Entre Dois Pontos do Plano
- 6.5- Equação da Reta
 - 6.5.1- Condições de alinhamento de três pontos
 - 6.5.2- Equação geral
 - 6.5.3- Equação segmentária
 - 6.5.4- Equações Paramétricas
 - 6.5.5- Equação Reduzida
- 6.6- Representação gráfica de retas
 - 6.6.1- Coordenadas do ponto de intersecção de retas
 - 6.6.2- Posições relativas entre retas
 - 6.6.3- Ângulo entre duas retas
 - 6.6.4- Distância entre ponto e reta

Unidade 7- Polinômios

- 7.1- Operações com Polinômios
- 7.2- Dispositivo de Briot-Ruffini
- 7.3- Equações Algébricas ou Polinomiais
- 7.4- Operações com Polinômios
- 7.5- Teorema do Resto
- 7.6- Dispositivo de Briot-Ruffini
- 7.7- Equações Algébricas ou Polinomiais
 - 7.7.1- Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Unidade 1- Conjuntos

As seguintes convenções serão usadas na teoria dos conjuntos.

a) Os conjuntos serão indicados por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Exemplos: A, B, C, ...

b) Os elementos serão indicados por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Exemplos: a, b, c, ...

c) Pertinência: quando se quer dizer que um elemento pertence a um conjunto, utiliza-se $\in$, que é lido como “pertence a”. O símbolo $\notin$ é a negação do símbolo de pertinência, portanto é lido como “não pertence a”.

d) Inclusão: quando se quer dizer que um conjunto é subconjunto de outro usamos o símbolo $\subset$, lê-se “está contido”; tendo como negação $\not\subset$ (não está contido).

Obs.: Dizemos que um conjunto A é subconjunto de um conjunto B quando todo elemento de A pertence ao conjunto B. Exemplos:

$A = \{1, 2, 3\}$ é subconjunto de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{x/x \text{ é capital brasileira}\}$ é subconjunto de $D = \{x/x \text{ é cidade do Brasil}\}$

1.1- Notação de conjuntos

Os conjuntos podem ser representados de três maneiras:

I- Representação Tabular (por Extensão)

Consiste em citar os elementos do conjunto separados por vírgulas e entre chaves. Exemplos:

a) $A = \{a, e, i, o, u\}$

b) $B = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

d) $D = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

e) $E = \{\text{Lua}\}$

II- Representação Através de uma Propriedade Comum a Todos os Elementos do Conjunto (por Compreensão)

a) $A = \{x/x \text{ é vogal}\}$

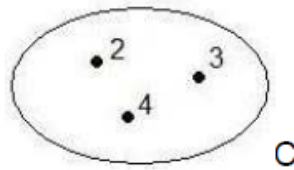
b) $B = \{x/x \text{ é número par}\}$

c) $C = \{x/x \text{ é número ímpar}\}$

d) $D = \{x/x \text{ é número primo}\}$

e) $E = \{x/x \text{ é satélite natural da Terra}\}$

III- Representação Gráfica (por Diagramas de Euler - Venn)



1.2- Tipos de Conjuntos

I- Conjunto Unitário: possui um único elemento.

Exemplos:

- a) $A = \{ 2 \}$
- b) $B = \{ x/x \text{ é capital do Brasil} \}$
- c) $C = \{ x/ x + 1 = 4 \}$

II- Conjunto Vazio: não possui elementos e pode ser representado por $\{ \}$ ou $\emptyset$.

Exemplos:

- a) $A = \{ \}$
- b) $B = \{ x/x \text{ é número natural menor do que zero} \}$

III- Conjunto Finito: possui um número finito de elementos.

Exemplos:

- a) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
- b) $B = \{ x/x \text{ é Estado Brasileiro} \}$
- c) $C = \{ x/x \text{ é número natural maior que 1 e menor que 7} \}$

IV- Conjunto Infinito: possui uma infinidade de elementos.

Exemplos:

- a) $A = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$
- b) $B = \{ x/x \text{ é número ímpar} \}$

V- Conjunto Universo: possui todos os elementos de acordo com o que estamos trabalhando, pode ser representado pela letra maiúscula U.

Exemplos:

- $U = \{ a, b, c, d, \dots, z \}$
- $U = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \}$
- $U = \{ x/x \text{ é número inteiro} \}$

VI- Conjuntos Disjuntos: não possuem nenhum elemento em comum. A interseção é o conjunto vazio.

Exemplos:

$A = \{x/x \text{ é número par}\}$ e $B = \{x/x \text{ é número ímpar}\}$

$C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{4, 5\}$

VII- Subconjunto: um conjunto é subconjunto de outro quando todos os seus elementos estão contidos no outro conjunto.

Exemplos:

$A = \{2, 3\}$ e $B = \{x/x \text{ é número natural}\} \rightarrow A \subset B$

$C = \{a, e, i\}$ e $D = \{x/x \text{ é vogal}\} \rightarrow C \subset D$

Simbologia:

$\subset \rightarrow$ está contido

$\not\subset \rightarrow$ não está contido

$\supset \rightarrow$ contém

$\not\supset \rightarrow$ não contém

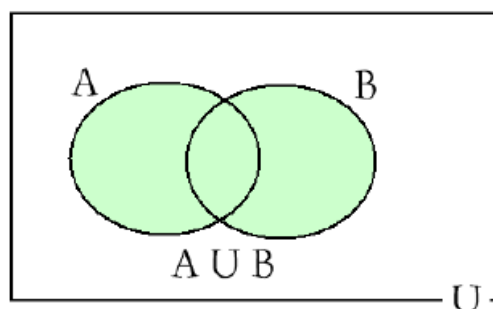
Obs.: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

1.3- Operações com Conjuntos

I- União “ $\cup$ ”

Dados dois conjuntos A e B, a união de A com B é o conjunto formado pelos elementos pertencentes ao conjunto A ou ao conjunto B.

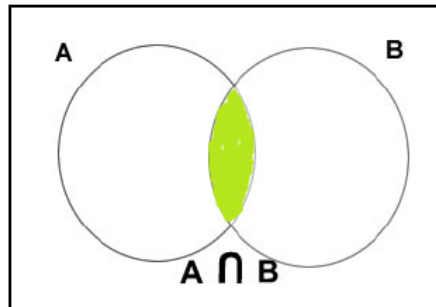
Simbolicamente: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$.



II- Interseção “ $\cap$ ”

Dados dois conjuntos A e B, a interseção de A com B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos comuns aos dois conjuntos.

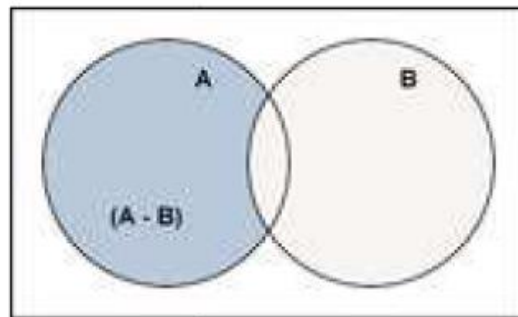
Simbolicamente: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$.



III- Diferença “ _ ”

Dados dois conjuntos A e B, a diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

Simbolicamente: $A - B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$



Observações:

i) $A - B \neq B - A$

ii) Se $B \subset A$, então $A - B = C_A^B$ (Complementar de B em relação à A)

iii) $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap A = A$ $A \cap B = B \cap A$

iv) $A \cup \emptyset = A$ $A \cup A = A$ $A \cup B = B \cup A$

v) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B)$ = número de elementos de $A \cup B$

$n(A)$ = número de elementos de A

$n(B)$ = número de elementos de B

$n(A \cap B)$ = número de elementos de $A \cap B$.

Exemplos:

Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{3,5,7,9\}$, determine.

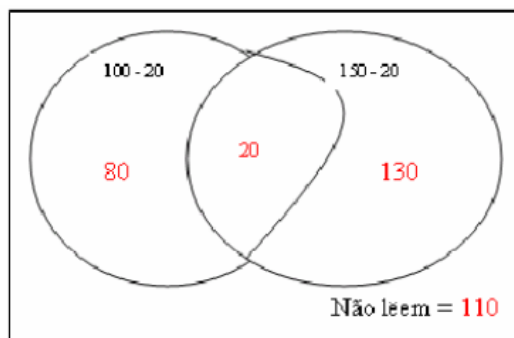
- a) $A \cap B = \{3, 5\}$
- b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
- c) $A - B = \{1, 2, 4\}$
- d) $B - A = \{7, 9\}$

1.4- Resolução de Problemas

1) Numa pesquisa realizada, verificou-se que, das pessoas consultadas: 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não lia nenhum dos jornais. Quantas pessoas foram consultadas?

Solução:

Resposta: $80 + 20 + 130 + 110 = 340$ pessoas foram consultadas.



2) Dados $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{c,d,e,f\}$ e $C = \{e,f,g,h\}$, analise os itens abaixo e assinale o correto, sabendo que os símbolos $\cup$ e $\cap$ significam união e interseção, respectivamente.

- A) $(A \cap B) \cup C = \{a,b,c,d,e\}$
- B) $(A \cup B) \cap C = \{b,d\}$
- C) $(B \cap C) \cup A = \{a,b,c,d,e,f\}$ (x) CORRETO
- D) $A \cup (B \cup C) = \{ \}$

3) Inscreveram-se num concurso público 700 candidatos para 3 cargos - um de nível superior, um de nível médio e um de nível fundamental. É permitido aos candidatos efetuarem uma inscrição para nível superior e uma para nível médio. Os candidatos ao nível fundamental somente podem efetuar uma inscrição. Sabe-se que 13% dos candidatos de nível superior efetuaram 2 inscrições. Dos candidatos de nível médio,

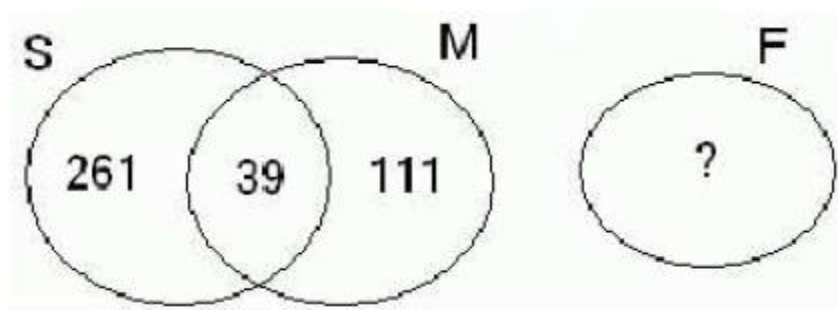
111 candidatos efetuaram uma só inscrição, correspondendo a 74% dos candidatos desse nível. Qual é então o número de candidatos ao nível fundamental?

Solução:

Sejam: M o número de candidatos de nível médio; $S \cap M$ o número de candidatos aos níveis superior e médio; S o número de candidatos ao nível superior; F número de candidatos ao nível fundamental.

Da Matemática Financeira sabemos que: $74\% = 74/100 = 0,74$ e $13\% = 13/100 = 0,13$.

Então, $0,74M = 111$, segue que, $M = 111 / 0,74 = 150$ e $S \cap M = 150 - 111 = 39$. Assim, $0,13S = 39$, implicando em $S = 39 / 0,13 = 300$. Observe o diagrama de Venn com a quantidade de elementos.

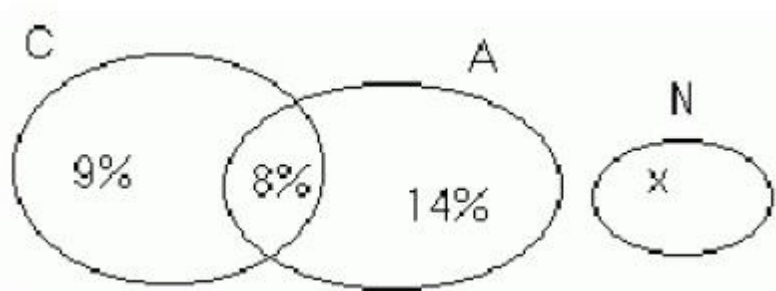


Temos: $150 - 39 = 261$. Logo, $261 + 39 + 111 + F = 700$. Consequentemente, $F = 700 - 411 = 289$.

4)(PUC) Um levantamento socioeconômico entre os habitantes de uma cidade revelou que, exatamente: 17% têm casa própria; 22% têm automóvel; 8% têm casa própria e automóvel. Qual o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel?

Solução:

Com base nos dados, fazemos um diagrama de Venn-Euler, colocando a quantidade de elementos dos conjuntos, começando sempre pelo número de elementos da interseção.



Como a soma das parcelas percentuais resulta em 100%, então $9\% + 8\% + 14\% + x = 100\%$.

Daí, vem que $31\% + x = 100\%$. Logo, o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel é $x = 100\% - 31\% = 69\%$.

5) Em uma classe de 150 alunos, 80 gostam de matemática, e 30 de física, sabendo que 10 gostam de física e matemática, quanto não gostam nem de física e nem de matemática?

Solução:

Neste tipo de exercício, a resolução fica mais fácil e rápida utilizando o diagrama de Venn, que são representados por círculos conforme exemplos anteriores, mas antes vale a pena descrever e encontrar algumas informações que o exercício nos fornece que é:

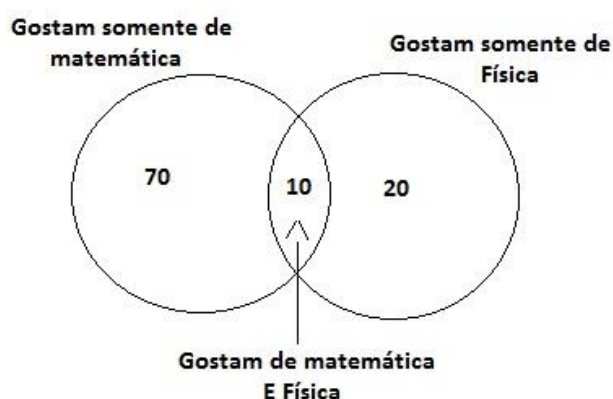
Total de alunos = 150

Gostam de matemática = 80

Gostam de física = 30

Gostam de física e matemática = 10

Assim temos:



Como vemos na representação acima, 70 alunos gostam somente de matemática, outros 20 somente de física e ainda outros 10 que gostam de ambas, realizando a soma desses três conjuntos de alunos temos o seguinte: $70+20+10 = 100$. Ou seja, desses 150 alunos, 100 gostam de física, de matemática ou de ambas as disciplinas, agora fazendo a seguinte conta $150 - 100$, concluímos que 50 alunos não gostam nem de física nem de matemática.

Desta forma, o total de alunos que não gostam nem de física e nem de matemática, é **50**.

6) Encontre o resultado de $(A - B) \cap C$, sendo $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{2, 5, 6, 7, 10\}$

Solução:

$$A - B = \{6\}$$

$$\{6\} \cap \{2, 5, 6, 7, 10\} = \{6\}$$

7) Sabe-se que 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16 visitaram São Paulo e 11, Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e, desses 5, 3 visitaram também São Paulo. O número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo foi:

a) **29**

b) 24

c) 11

d) 8

e) 5

Solução. Inicialmente supomos que há interseções entre as cidades. Considere a, b, c o número de estudantes que visitaram respectivamente somente Manaus, São Paulo, Salvador. Considere ainda d o número de estudantes que visitaram respectivamente somente Manaus e São Paulo. O número de estudantes visitando somente São Paulo e Salvador será representado por e. O diagrama da situação é mostrado na figura.

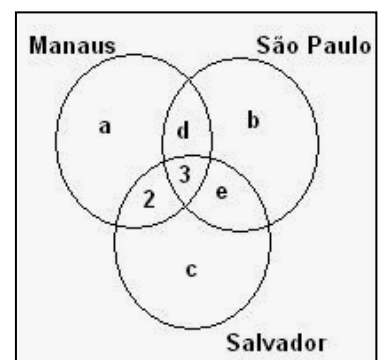
$$\begin{cases} a + d + 5 = 16 \\ d + b + e + 3 = 16 \\ c + e + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d = 11 \\ d + b + e = 13 \\ c + e = 6 \end{cases}$$

Substituindo na soma total, vem :

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + 2 + 3 = 35 \\ a + b + c + d + e = 30 \Rightarrow (a + d) + (c + e) + b = 30 \Rightarrow 11 + 6 + b = 30 \end{cases}$$

$$i) b = 30 - 17 = 13. \text{ Logo, } d + 13 + e = 13 \Rightarrow d + e = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} a + 0 = 11 \\ c + 0 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ c = 6 \end{cases}$$



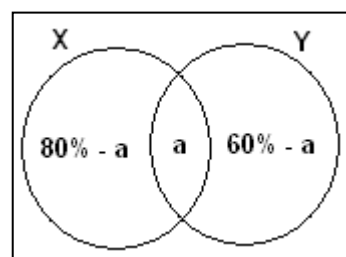
O valor pedido será: $n(M \cup SP) = a + d + 5 + b + e = 11 + 0 + 5 + 13 + 0 = 29$.

8) Numa universidade são lidos apenas dois jornais, X e Y. 80% dos alunos da mesma lêem o jornal X e 60%, o jornal Y. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, assinale a alternativa que corresponde ao percentual de alunos que lêem ambos:

- a) 80% b) 14% **c) 40%** d) 60% e) 48%

Solução. O percentual de 80% de leitores do jornal X inclui parte dos 60% dos leitores do jornal Y. Como cada aluno lê pelo menos um dos jornais, o total entre os diagramas será de 100%. Considerando a o percentual dos leitores de ambos os jornais, temos o diagrama e o cálculo mostrados.

$$\begin{aligned}(80\% - a) + a + (60\% - a) &= 100\% \\ 140\% - a &= 100\% \\ -a &= -40\% \Rightarrow a = 40\%\end{aligned}$$

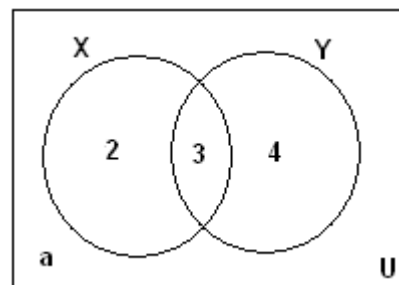


9) Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y. Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X, 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas. Quantas não comeram nenhuma das sobremesas?

- a) 1** b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

Solução. O diagrama ilustra a situação. O número de pessoas que não comeram nenhuma sobremesa está representado pela letra a e se situa fora dos diagramas e dentro do quadrado (conjunto universo).

$$\begin{cases} n(U) = 10 \\ n(U) = 2 + 3 + 4 + a = 9 + a \end{cases} \Rightarrow 9 + a = 10 \Rightarrow a = 10 - 9 = 1.$$



10) Um conjunto A tem 10 elementos e um conjunto B tem 20 elementos. Quantos elementos há no conjunto (A ∪ B)?

Solução. Repare que não foi informado sobre a interseção entre A e B. Logo há duas possibilidades:

a) Se $A \cap B = \{\}$ então $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 10 + 20 = 30$.

b) Se $A \cap B \neq \{\}$ então $n(A \cup B) = 30 - n(A \cap B)$. Isto é, subtrai-se de 30 o número de elementos da interseção entre A e B.

11) Estamos acompanhando a vacinação de 200 crianças em uma creche. Analisando as carteiras de vacinação, verificamos que 132 receberam a vacina

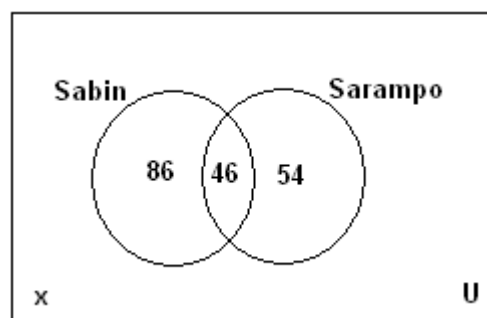
Sabin, 100 receberam a vacina contra sarampo e 46 receberam as duas vacinas. Vamos orientar os pais das crianças, enviando uma carta para cada um, relatando a vacina faltante.

- Quantos pais serão chamados para que seus filhos recebam a vacina Sabin?
- Quantos pais serão chamados para que seus filhos recebam a vacina contra sarampo?
- Quantos pais serão chamados para que seus filhos recebam as duas vacinas?

Solução. Considerando o conjunto universo U com 200 crianças, construímos um diagrama com a situação ilustrada. O número de crianças que não tomou nenhuma das duas vacinas está no conjunto U , fora dos diagramas.

Repare que:

- Só a Sabin são $132 - 46 = 86$ crianças;
- Só a de Sarampo são $100 - 46 = 54$ crianças.
- $86 + 46 + 54 + x = 200$. Logo, $x = 200 - 186 = 14$ crianças.



Com base nesses resultados vem:

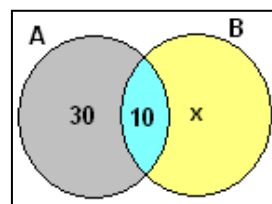
- $200 - 132 = 68$ pais de crianças serão chamados para que seus filhos recebam a Sabin. Ou $54 + 14 = 68$.
- $200 - 100 = 100$ pais de crianças serão chamados para que seus filhos recebam a de Sarampo. Ou $86 + 14 = 100$.
- Como 14 crianças não receberam nenhuma, este será o número de pais que serão chamados para que as crianças recebam as duas vacinas.

12) Sejam A e B são dois conjuntos tais que $(A - B)$ possui 30 elementos, $A \cap B$ tem 10 elementos e $A \cup B$ tem 48 elementos. Então o número de elementos de $B - A$ é:

- 8
- 10
- 12
- 18

Solução. Repare que não há elementos comuns em $(A - B)$, $(A \cap B)$ e $(B - A)$. A representação em cores no diagrama ilustra a situação. Considerando x o número de elementos de $(B - A)$, temos:

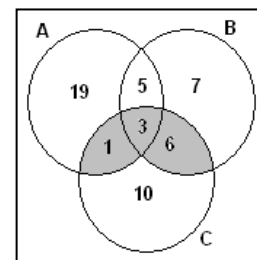
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ 48 &= 40 + (10 + x) - 10 \\ 48 &= 40 + x \\ x &= n(B - A) = 8 \end{aligned}$$



13) Considere três conjuntos A , B e C , tais que: $n(A) = 28$, $n(B) = 21$, $n(C) = 20$, $n(A \cap B) = 8$, $n(B \cap C) = 9$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Assim sendo, o valor de $n((A \cup B) \cap C)$ é:

- 3
- 10
- 20
- 21

Solução. Representando as informações através de diagramas identifica-se o valor pedido. A região pintada representa o número de elementos que estão na união de A com B e no conjunto C: $1 + 3 + 6 = 10$.



Unidade 2- Conjuntos Numéricos

Números são ideias que só existem em nossa mente. Para representar essas ideias usamos símbolos chamados de numerais.

Exemplo: 4, quatro, IV, $\frac{8}{2}$, four, etc., são numerais de um mesmo número.

O aparecimento dos números foi um fator determinante para o desenvolvimento da humanidade. O conceito de número e o processo de contagem desenvolveram-se ao longo da história das civilizações. Mesmo nos tempos mais primitivos, o homem já tinha uma noção de número, pelo menos já reconhecia quando havia *mais* ou *menos* objetos.

Apesar dos milhares de anos que nos separam da invenção dos algarismos indo-arábicos somente no século passado surgiram as primeiras teorias sobre números.

Os números representam um papel fundamental não só na matemática, como na ciência de um modo geral e na nossa vida diária. Vivemos cercados de números: horários, tabelas, gráficos, preços, juros, impostos, velocidades, distâncias, temperaturas, resultados de jogos, etc.

Temos horários para ir e voltar do trabalho, nosso endereço tem um número de CEP, nossa identidade e CPF são números. Além desses ainda existem os números de emergência: polícia, bombeiros, hospitais, etc.

Os números acompanham a evolução do ser humano primitivo vindo das cavernas e hoje, com o uso dos computadores, são ferramentas fundamentais na revolução que presenciamos na organização de nossa sociedade. Os conjuntos numéricos já foram estudados em várias fases escolares, porque tais conjuntos são alicerces de vários conteúdos.

Os registros mais antigos que contêm a noção de número foram encontrados na China, Índia, Mesopotâmia (atual Iraque) e Egito. Um dos documentos mais conhecidos é o Papiro de Ahmes (ou Rhind) encontrado no Egito.

2.1- Números Naturais

Para representar quantidades o homem já usou marcas em paredes de cavernas, em troncos de árvores e até em ossos de animais. Demorou muito até se chegar à escrita numérica utilizada atualmente. Vários povos antigos como os babilônios, os romanos, os egípcios, os chineses, os maias, os gregos, etc., inventaram diferentes sistemas de numeração. O sistema de numeração que se utiliza hoje se originou do sistema dos hindus, divulgado pelos árabes, daí a denominação sistema de numeração indo-arábico. Até ser padronizado, após a invenção da imprensa, esse sistema passou por várias modificações.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ está relacionado à contagem sendo definido por $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$. Dependendo do autor, o número zero (0) pode estar incluído ou não no conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

No conjunto dos números naturais há duas operações bem definidas, a soma (+) e o produto (. ou x); ou seja, a adição, que aos números $n, p \in \mathbb{N}$ faz corresponder a soma $n + p$ e a multiplicação, que lhes associa o produto np .

Na sequência dos naturais, a cada número segue imediatamente outro, chamado de sucessor. Assim o sucessor de 4 é 5, de 23 é 24, de 312 é 313 e assim por diante, indefinidamente. Dessa forma, não existe o maior número natural. Os matemáticos expressam essa ideia dizendo que a sucessão dos números naturais é infinita. A compreensão do infinito foi um grande passo de abstração, possível apenas na mente humana.

As propriedades fundamentais do conjunto $\mathbb{N}$ de números naturais são conhecidas como Axiomas de Peano. Dentre elas duas merecem destaque: a propriedade que garante a existência de um primeiro número natural – o número 1 e outra que garante que todo número natural tem um “sucessor”. Por exemplo: o sucessor de 3 é 4; o sucessor de 99 é 100 e, regra geral, o sucessor de n é $n + 1$.

Tudo o que se conhece sobre o números naturais pode ser demonstrado como consequência dos **Axiomas de Peano**, enumerados abaixo.

- a) Todo número natural tem um único sucessor.

- b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
- c) Existe um único número natural, chamado 1 e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
- d) Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertencer a X , então $X = \mathbb{N}$. (**Princípio da Indução**).

O Princípio da Indução pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade P e, se do fato de um número natural n gozar de P pudermos concluir que $n + 1$ goza da propriedade P , então todos os números naturais gozam dessa propriedade. Uma demonstração na qual esse axioma é utilizado chama-se uma demonstração por indução.

Resumindo:

O método da indução consiste no seguinte: para provar que cada $P(n)$ é uma afirmação verdadeira, prova-se que

- $P(1)$ é uma afirmação verdadeira.
- sempre que $P(n)$ for uma afirmação verdadeira com ($n \in \mathbb{N}$), $P(n + 1)$ também é verdadeira.

Exemplos:

a) Provar que $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ é divisível por 3. O que é obviamente verdadeiro.

Assumindo como hipótese que $P(n)$ se verifica, vamos provar $P(n + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{ii) } P(n + 1) &= (n + 1)^3 + 2(n + 1) = (n + 1) [(n + 1)^2 + 2] = (n + 1) [n^2 + 2n + 1 + 2] = \\ &= (n + 1) [n^2 + 2n + 3] = n^3 + 2n^2 + 3n + n^2 + 2n + 3 = \textcolor{red}{(n^3 + 2n)} + \textcolor{blue}{3n^2 + 3n + 3}. \end{aligned}$$

Por hipótese indutiva, $\textcolor{red}{(n^3 + 2n)}$ é divisível por 3; por outro lado, é óbvio que $\textcolor{blue}{(3n^2 + 3n + 3)}$ é divisível por 3. Portanto $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ é divisível por 3, completando – se dessa forma o passo indutivo.

b) Validar a fórmula

$$P(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

i) $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ é verdadeira.

Agora vamos supor que a igualdade seja verdadeira somando $(n+1)$ em cada lado da igualdade.

$$P(n+1) = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ii) $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, estabelece a veracidade de $P(n+1)$.

c) Mostrar a validade da fórmula $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Observe que $P(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ é verdadeira.

Suponhamos que, para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é válida. Somando $(n+1)^2$ aos dois lados dessa igualdade, temos que

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[(n+1) + 1][2(n+1) + 1]}{6}, \end{aligned}$$

estabelecendo dessa forma a veracidade de $P(n+1)$. Logo a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Mostrar a validade, para todo natural n , da fórmula

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Observe que $P(1)$ é verdadeira, já que a fórmula é válida para $n = 1$. Suponha agora que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira; ou seja, que

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Queremos provar que $P(n+1)$ é verdadeira. Somando $2n + 1$, que é o próximo número ímpar após $2n - 1$, a ambos os lados da igualdade acima, obtemos a igualdade também verdadeira.

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Isso mostra que $P(n + 1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira. Pelo teorema, a fórmula é válida para todo número natural n .

e) Vamos provar que é verdadeira, pra todo $n \in \mathbb{N}$, a fórmula

$$P(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Observemos inicialmente que

$$P(1) : \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \quad \text{é verdadeira.}$$

Suponhamos que, para algum n , tem-se que $P(n)$ é verdadeira.

Somando a ambos os lados dessa igualdade $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$,

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \\ \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

Mostrando, assim, que $P(n + 1)$ é verdadeira. Portanto, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2- Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é formado por $\mathbb{N}$ e o conjunto dos opostos (ou simétricos) dos naturais, mais o elemento neutro, que é o zero (0). Dessa forma fica definido por $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$.

Em $\mathbb{Z}$, as operações de soma (+), produto (· ou x) e subtração (–) estão bem definidas. Essas operações nos possibilitam construir novos números a partir de pares de números dados, e são essenciais para o processo de contagem.

O uso de números inteiros negativos é frequente em nosso cotidiano. No entanto, durante séculos, o homem não encontrou significado para uma subtração do tipo (40 – 50). A primeira interpretação apresentada a uma operação como essa admitia o resultado como sendo uma dívida e possibilitou o surgimento dos números negativos.

Números precedidos de sinais de menos – números negativos – apareceram pela primeira vez por volta do século VII, em uma obra do matemático hindu Brahmagupta.

Como todos naturais também são inteiros, pode-se dizer que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Ou ainda, que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, que se indica por $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

As propriedades fundamentais da adição (representada por +) e da multiplicação (representada por x ou ·) de números inteiros estão relacionadas abaixo.

Para números inteiros quaisquer x, y e z:

- a) Propriedade Comutativa: $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$
- b) Propriedade Associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- c) Propriedade Distributiva: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- d) O número 1 desempenha o papel de unidade na multiplicação: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
(**Observação:** 1 é neutro da multiplicação)
- e) O número zero é neutro na adição: $x + 0 = 0 + x = x$
- f) Um número a é simétrico de um número b se $a + b = 0$.

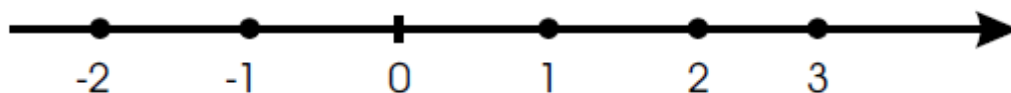
Observamos que a ser simétrico de b, equivale a b ser simétrico de a. De fato, $a + b = 0$ é equivalente a $b + a = 0$. Se a é simétrico de b, então $a = -b$. De maneira geral – a é simétrico de a (e a é simétrico de – a).

Exemplos:

- i) –2 é simétrico de 2, pois $-2 + 2 = 0$.
- ii) 2 é simétrico de –2, pois $-2 = -(-2)$

Obs.: O produto de qualquer número por (-1) é igual ao simétrico desse número. $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$.

Representação de $\mathbb{Z}$ sobre uma reta:



A partir do 0 (zero), e no sentido positivo da reta vamos justapondo sucessivamente o segmento tomado como unidade de maneira a relacionar cada número natural com um único ponto da reta. Essa representação é construída de tal forma que o segmento de reta cujos extremos são um número natural n e seu sucessor $n + 1$ tem o mesmo comprimento do segmento unidade. Uma representação análoga é feita a partir do 0 (zero) no sentido negativo da reta, marcando sucessivamente pontos associados aos números negativos $(-1, -2, -3, -4, -5, \dots)$.

Observações:

- Quaisquer dois pontos consecutivos utilizados para representar números inteiros na reta definem segmentos de comprimento unitário.
- Dizemos que o número inteiro a é menor que o número inteiro b se na representação sobre a reta orientada o ponto que representa a aparecer antes do ponto que representa b .
- Usamos a notação $a < b$, para indicar que a é menor que b . A notação $b > a$ (b maior que a) possui o mesmo significado de $a < b$ (a menor que b).
- A notação $a \leq b$ (a é menor ou igual a b) é usada para indicar que a é menor do que ou igual a b ; e $b \geq a$ (b é maior ou igual a a) é equivalente a $a \leq b$.
- Um número n é dito positivo se for maior do que zero, isto é, $n > 0$.
- Um número n é dito negativo se for menor do que zero, isto é, $n < 0$.
- O número 0 (zero) não é positivo nem negativo.
- Para se adicionar números inteiros de mesmo sinal, basta somar seus valores absolutos e o resultado recebe o mesmo sinal das parcelas.
- Para se adicionar números inteiros de sinais diferentes, basta subtrair o menor valor absoluto do maior; o resultado terá o mesmo sinal do inteiro de maior valor absoluto.

- O produto de dois inteiros de sinais diferentes é um número negativo cujo valor absoluto é obtido multiplicando-se o módulo dos dois inteiros.
- O produto de dois inteiros de sinais iguais é um número positivo cujo valor absoluto é obtido multiplicando-se o módulo dos dois inteiros.

2.2.1 - Múltiplos e Divisores

Múltiplos de um número inteiro: Dado um número inteiro n , os múltiplos de n são obtidos pelo produto de n por um número inteiro arbitrário.

Exemplos: $M(2) = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Observações:

- O zero é múltiplo de qualquer número inteiro.
- Dado dois números inteiros não nulos a e b , o mínimo múltiplo comum dos números é o menor inteiro positivo que é múltiplo de ambos. Podemos usar a notação $m.m.c.(a,b)$ para representar esse número.
- Todo número inteiro n é múltiplo de si próprio.
- O conjunto dos múltiplos de um inteiro diferente de zero é sempre um conjunto infinito.

Divisores de um número inteiro: Um número inteiro d , diferente de zero, é divisor de um número inteiro m , se existir outro inteiro p tal que $m = p \cdot d$.
Exemplo: $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ – divisores inteiros positivos de 12.

Observações:

- Dado um número inteiro m qualquer, o número 1 e m são divisores de m .
- Um número primo p é um número natural diferente de 1 e que admite como divisores positivos apenas os números 1 e p , isto é, $D(p) = \{1, p\}$.
- Dois números inteiros a e b são primos entre si se admitirem apenas o número 1 como divisor positivo comum.
- O zero não é divisor de nenhum inteiro.
- Todo número inteiro n é divisor de si próprio.
- 1 é divisor de todos os números.

Outros exemplos:

- a) Como $14 = 7 \times 2$, temos que 14 é múltiplo de 7 e de 2.
- b) 36 é um múltiplo dos inteiros 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36 e -36. Tal fato pode ser observado em: $6 = 36 \times 1$; $36 = (-36) \times (-1)$; $36 = 2 \times 18$; $36 = (-2) \times (-18)$; $36 = 3 \times 12$; $36 = (-3) \times (-12)$; $36 = (-4) \times (-9)$; $36 = 4 \times 9$; $36 = 6 \times 6$; $36 = (-6) \times (-6)$.
- c) 7 não é múltiplo de 2, pois $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 4 = 8$, não existem inteiros entre 3 e 4.
- d) -17 não é múltiplo de 3, $(-5) \times 3 = -15$ e $(-6) \times 3 = -18$, não existem inteiros entre -6 e -5.
- e) 2 divide 14, pois $14 = 2 \times 7$.
- f) -4 divide 36, pois $36 = (-4) \times (-9)$.
- g) 2 não divide 7, pois não existe nenhum número inteiro K de modo que $7 = 2K$.
- h) O conjunto dos múltiplos de 2 é $\{ \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots \}$. Esse conjunto conhecido como conjunto dos números pares, também representa o conjunto dos múltiplos de -2. Com o todo número par é o dobro de algum inteiro, esse conjunto pode ser designado por $\{ 2K \mid K \text{ é um número inteiro} \}$.
- i) O conjunto formado por todos os inteiros que não são números pares é o conjunto dos números ímpares: $\{ \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots \}$. Considerando que todo número par é da forma $2K$, em que K é um número inteiro; todo número ímpar pode ser representado na forma $2K + 1$ ou $2K - 1$, em que K é um inteiro.

Exemplos:

- a) 16 é par, pois $16 = 2 \times 8$.
- b) 9 é ímpar, pois $9 = 2 \times 4 + 1 = 2 \times 5 - 1$.

2.2.2 - Algoritmo de Euclides

Uma importante contribuição de Euclides de Alexandria na Teoria da Divisibilidade é o algoritmo da divisão ou algoritmo de Euclides (Divisão Euclidiana).

Dados $m, d \in \mathbb{Z}$, sendo $d > 0$, pode-se escrever m como soma de um múltiplo de d e de um possível resto r menor que d e maior ou igual a zero. Ou seja,

$$m = q \cdot d + r.$$

O número q é o quociente e r é o resto da divisão euclidiana de m por d.

Exemplos:

a) 27 não é múltiplo de 4, assim existem diversos modos de se escrever esse número utilizando a tabuada de multiplicação por 4. Podemos escrever: $27 = 7 \times 4 - 1$ ou $27 = 6 \times 4 + 3$ ou $27 = 5 \times 4 + 7$ e outras formas. No entanto, dentre todas as possibilidades de $27 = 4q + r$, em apenas uma delas encontramos $0 < r < 4$, sendo que $q = 6$ e $r = 3$.

b) A divisão euclidiana de 35 por 5 apresenta como quociente $q = 7$ e resto $= 2$, pois $37 = 5 \times 7 + 2$ e $0 \leq r = 2 < 5$.

c) Dividir o número -18 pelo número 7.

Escrever os múltiplos de 7: ..., -42 , -35 , -28 , -21 , -14 , -7 , 0 , 7 , 14 , e procurar o múltiplo menor que -18 e mais próximo dele. Descobrimos que -21 foi escolhido. Assim: $-18 = -21 + 3 \rightarrow -18 = -3 \cdot 7 + 3$ ou

$$\begin{array}{r|l} -18 & 7 \\ 3 & -3 \end{array}$$

Comparando o resto 3 com o divisor 7, encontra-se $0 \leq 3 < 7$.

Observação: Foram realizadas divisões entre números inteiros em que o divisor é “sempre positivo” e o resto, maior do que ou igual a zero e inferior ao divisor. Isso define um método de divisão conhecida como Divisão Euclidiana.

2.2.3 - Valor Absoluto

Pode-se dizer que módulo é a distância de um número real ao número zero, pois o módulo de número real surgiu pela necessidade de medir a distância de um número negativo ao zero. Ao se calcular a distância de um número negativo qualquer ao zero observa-se que essa medida fica negativa e como não é habitual dizer que um comprimento é negativo foi criado o módulo de número real que torna esse valor positivo ou nulo. Assim, o módulo de um número real irá seguir duas alternativas:

- O módulo ou valor absoluto de um número real é o próprio número, se ele for positivo.
- O módulo ou valor absoluto de um número real será o seu simétrico, se ele for

negativo.

Observação: A representação de um módulo ou valor absoluto de um número real é feito por duas barras paralelas.

Definição: O valor absoluto de um número inteiro m , representado por $|m|$ é definido por

i) $|m| = m$ se $m > 0$.

ii) $|m| = -m$ se $m < 0$.

iii) $|0| = 0$.

Observação: $|m| = |-m|$ para todo inteiro m .

Exemplos:

a) $|-5| = 5$

b) $|2014| = 2014$

c) $|-305| = 305$

2.2.4 - Propriedades operacionais para adição e multiplicação de inteiros

1ª) Para adicionar números inteiros de mesmo sinal, basta somar seus valores absolutos e o resultado receberá o mesmo sinal das parcelas.

Exemplos: Calcule as somas.

a) $-5 + (-18) = -5 - 18 = -(5 + 18) = -23$

b) $+10 + (+15) = +10 + 15 = +25 = 25$

2ª) Para adicionar números inteiros de sinais diferentes, basta subtrair o menor valor absoluto do maior. O resultado receberá o mesmo sinal do número inteiro de maior valor absoluto.

Exemplos: Calcule as somas.

a) $-5 + (+18) = -5 + 18 = 18 - 5 = +13 = 13$

b) $+10 + (-15) = +10 - 15 = -(15 - 10) = -5$

3ª) O produto de dois números inteiros que possuem sinais diferentes será um número negativo cujo valor absoluto é obtido multiplicando – se ambos os fatores.

Exemplos: Calcule os produtos.

a) $(-5) \cdot (+18) = -(5 \cdot 18) = -90$

b) $(+10) \cdot (-15) = -(10 \cdot 15) = -150$

4ª) O produto de dois números inteiros de mesmo sinal será um número positivo, cujo valor absoluto é obtido pelo produto de ambos os fatores.

a) $(-5) \cdot (-18) = +(5 \cdot 18) = +90 = 90$

b) $(+10) \cdot (+15) = +(10 \cdot 15) = +150 = 150$

2.2.5 - Hierarquia das operações

Nas operações em uma expressão, devemos obedecer a seguinte ordem:

1. Potenciação ou Radiciação
2. Multiplicação ou Divisão
3. Adição ou Subtração

Observações quanto à prioridade:

1. Antes de cada um dos três itens destacados, deve-se realizar a operação que estiver dentro dos parênteses, colchetes ou chaves, nessa ordem.
2. A multiplicação pode ser indicada por $(\times)$ ou por um ponto $(\cdot)$ ou às vezes sem sinal, desde que fique clara a intenção da expressão.
3. Devemos utilizar parênteses quando substituimos variáveis por valores negativos.

Observação: O valor numérico de uma expressão algébrica é o valor obtido na expressão quando substituimos a variável por um valor numérico.

Exemplos:

a) Considerando $P(x) = 2x + 10$, calcule $P(5)$. $P(5) = 2 \cdot 5 + 10 = 10 + 10 = 20$.

b) Seja $A = 4X + 2Y - 7$, calcule o valor de A sabendo que $X = 2$ e $Y = -3$.

$$A = 4 \cdot 2 + 2(-3) - 7 = 8 - 6 - 7 = 8 - 13 = -5$$

2.3- Números Racionais

Quando o homem observou que os números naturais não eram suficientes para indicar partes das coisas inteiras, ou de grupos de objetos, ele percebeu a necessidade de criar novos números, ou seja, por isso surgiram os números fracionários ou racionais. Assim, apareceram as frações, palavra que deriva do latim e significa “parte de um todo”.

O conjunto dos quocientes de inteiros, isto é, das frações de inteiros é conhecido como conjunto dos números racionais. O conjunto dos racionais é descrito assim: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$.

Estão bem definidas em $\mathbb{Q}$, as operações de soma (+), produto (. ou x) , subtração (–) e divisão (: ou /).

Todo número racional $\frac{p}{q}$ possui uma representação decimal, com a vírgula para separar a parte inteira da parte decimal. Nos números racionais escritos em notação decimal, a parte decimal pode apresentar uma quantidade finita ou infinita de algarismos. Quando a quantidade for infinita, os algarismos repetem-se periodicamente. Exemplos:

a) $\frac{3}{4} = 0,75$

b) $\frac{7}{3} = 2,333... = 2, \bar{3}$.

Expressões do tipo $\frac{p}{q}$, em que p e q são números inteiros e $q \neq 0$, são denominadas frações. O termo localizado acima do traço é chamado numerador e o que está abaixo do traço, denominador da fração.

Quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número inteiro não nulo, não modificamos o valor da fração. Assim, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, se existir um número inteiro k, não nulo, tal que $r = k.p$ e $s = k.q$.

2.3.1- Igualdade ou equivalência de frações

Duas frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são equivalentes ou iguais se e somente se $p.s = q.r$.

Em símbolos pode ser expresso por:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \leftrightarrow p.s = q.r. \text{ (Regra do produto cruzado)}$$

Exemplos:

a) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

$$b) \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

2.3.2- Soma e produto de números racionais

Sejam $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ números racionais quaisquer. Então: $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p.s+r.q}{q.s}$ e $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s}$ são, respectivamente, a soma e o produto dos números racionais.

Observações:

i) Inclusão de conjuntos

É válida a inclusão $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pois se $p \in \mathbb{Z}$, então $p = \frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$. É importante considerar $\mathbb{Z}$ dentro de $\mathbb{Q}$ pelo fato de que as operações de adição e multiplicação definidos em $\mathbb{Q}$ gozam de todas as propriedades enunciadas para as mesmas operações em $\mathbb{Z}$.

ii) Frações redutíveis e irredutíveis

Uma fração $\frac{p}{q}$ é irredutível se não existe nenhum número natural $d > 1$, que seja divisor de p e divisor de q . Caso contrário, a fração é redutível. Ou melhor, $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível se p e q são números primos entre si. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ é irredutível e $\frac{6}{9}$ é redutível.

iii) Fração irredutível com denominador positivo

Para descobrir uma fração irredutível que seja equivalente a uma fração redutível apresentada, basta efetuar as divisões necessárias no numerador e no denominador. Caso, ao término das divisões, o denominador seja negativo, multiplica-se ambos os termos da fração por (-1) para que o denominador se torne positivo.

Exemplos:

$$a) \frac{100}{150} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{120}{-150} = \frac{12}{-15} = \frac{-4}{5}$$

iv) Igualdade de números racionais

Dados dois números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são equivalentes (iguais) se e somente se $p.s = q.r$. Em símbolos: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \leftrightarrow p.s = q.r$.

v) Divisão de números racionais

Se $\frac{r}{s} \neq 0$, a divisão de $\frac{p}{q}$ por $\frac{r}{s}$ é definida por $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{p.s}{q.r}$

vi) Inverso de racionais

Se $\frac{p}{q} \neq 0$, o inverso de $\frac{p}{q}$ é o número $\frac{q}{p}$. Observa-se $\frac{p}{q} = \frac{q}{p} = 1$.

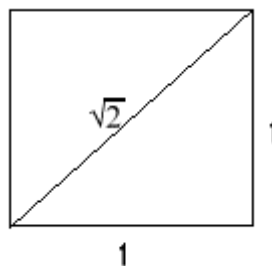
vii) Simétrico (ou oposto) de racionais

O simétrico do racional m é o racional n tal que $m + n = 0$. O simétrico de $\frac{p}{q}$ é $-\frac{p}{q}$. O simétrico de zero é o próprio zero.

Observação: $\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}$.

2.4- Números Irracionais

Acreditou-se durante muito tempo que o conjunto dos números racionais era suficientemente grande para abrigar todos os valores utilizados nas medições de comprimento, área, volume, etc. No século V a. C., um discípulo de Pitágoras observou que isso não era verdade.



Por exemplo, a medida da diagonal de um quadrado de lado $l = 1$ e o próprio lado eram medidas incomensuráveis, isto é, não existe um segmento de reta w que caiba n vezes no lado l e m vezes na diagonal d , que mede $d = \sqrt{2}$. Essa constatação gerou uma enorme crise no pitagorismo e na matemática grega,

mostrando que o conjunto dos números naturais e as frações não eram suficientes para realizar todas as medições possíveis.

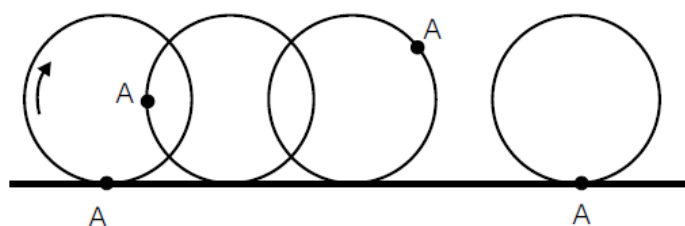
Esse problema geométrico envolve outro de natureza aritmética, que consiste na impossibilidade de encontrar números racionais para raízes quadradas de certos números, como por exemplo, raiz quadrada de 2. Assim o conceito de número foi ampliado, surgindo dessa forma o conjunto dos números irracionais.

A representação decimal de um número irracional apresenta, sempre depois da vírgula, infinitas casas que não formam período. Por exemplo:

a) $\sqrt{2} = 1,41421356241933916628\dots$ b) $\pi = 3,14159265358979323846\dots$

2.4.1- O Número π

O número π não pode ser expresso por um número racional. Para entender pode-se tomar um círculo de diâmetro igual a 1 e forçar este círculo a rolar sem deslizamentos ao longo de uma reta, como na figura abaixo.



O perímetro do círculo.

O segmento de reta, compreendido entre duas posições consecutivas em que um ponto escolhido A toca a reta de rolagem, tem comprimento o qual denominamos π . Assim, o número π é o comprimento ou o perímetro de um círculo cujo diâmetro mede 1. Era atribuído a π o valor aproximado de $\frac{256}{81} \cong 3,16\dots$ (Oriente Antigo). Esse dado histórico está registrado no Papiro Rhind (1650 a.C.).

O grande geômetra da época grega – Arquimedes de Siracusa (século IV a.C.) – desenvolveu métodos geométricos eficientes para calcular valores numéricos ainda mais próximos para π . Usando um polígono de 96 lados inscrito numa circunferência, encontrou $\pi \sim 3,1428$.

Entretanto, foram necessários mais de 3400 anos para que, em 1882, o matemático inglês Ferdinand Lindeman pudesse provar que o número π é irracional.

Exemplo:

a) Provar que $\sqrt{3}$ é irracional.

Prova: De fato, suponha, por absurdo, que $\sqrt{3}$ é um número racional. Então

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n},$$

onde $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível com $n > 0$. Logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow m^2 = 3n^2.$$

A última igualdade mostra que m^2 é divisível por 3, logo $m^2 = 3q$. Isto é, $m = 3q$, para algum número natural q . Então

$$m^2 = 3n^2 \Rightarrow (3q)^2 = 3n^2 \Rightarrow 3q^2 = n^2.$$

Então n^2 é divisível por 3. Mas isso não pode ocorrer, porque m e n divisíveis por 3 contraria o fato que $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Esse absurdo prova que

$$\sqrt{3} \neq \frac{m}{n},$$

para quaisquer números inteiros m e n . Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional.

b) Provar que

Se p é um número natural ímpar então $\sqrt{2p}$ é irracional.

Vamos supor, por absurdo, que existe uma fração irredutível $\frac{m}{n}$, $n > 0$, tal que $\sqrt{2p} = \frac{m}{n}$. Então,

$$2p = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow m^2 = 2pn^2.$$

Logo m^2 é par e m é também par. Isto é, $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(2k)^2 = 2pn^2 \Rightarrow 4k^2 = 2pn^2 \Rightarrow 2k^2 = pn^2.$$

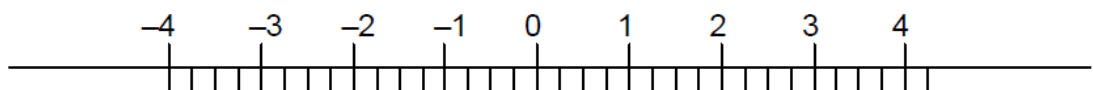
Isso mostra que pn^2 é par. Mas como p é um número ímpar, para pn^2 ser par a única possibilidade é que n^2 seja par. Sendo n^2 par temos que n é par. Assim, m par e n par implica $\frac{m}{n}$ é redutível (podemos dividir por 2). Isso é uma contradição. Assim, não podemos escrever $\sqrt{2p} = \frac{m}{n}$. Logo $\sqrt{2p}$ é um número irracional.

2.5- Números Reais

O conjunto que reúne todos os números racionais e irracionais é chamado de conjunto dos números reais e é representado pela letra $\mathbb{R}$.

É possível estabelecer uma correspondência biunívoca, ou correspondência um a um, entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta, isto é, sempre será possível associar um único número real a cada ponto P de uma reta e, reciprocamente, a cada ponto P de uma reta é possível associar um único número real de a maneira descrita a seguir.

Escolhendo um ponto arbitrário O da reta e uma conveniente unidade de medida. O ponto O será chamado de origem. A esse ponto será associado o número real 0 (zero). Cada número real positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades à direita da origem e cada número negativo $(-x)$ é representado pelo ponto da reta que está a x unidades à esquerda da origem. O número associado ao ponto P é chamado *coordenada* de P , a reta é então chamada, *reta real numerada* ou simplesmente *reta real*.



O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta, enquanto essa reta é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$.

Resumindo:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; Considere $\mathbb{I}$ = conjunto dos números irracionais.

2.6- Números Complexos

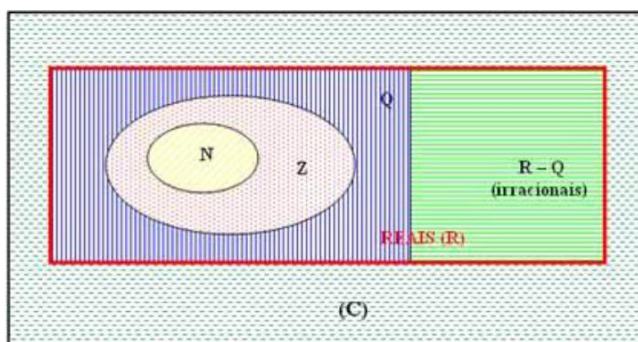
São denominados números complexos os números da forma $a + bi$, sendo a e b números reais e i , a chamada unidade imaginária, para a qual $i^2 = -1$.

O conjunto formado por todos os números complexos é indicado pela letra $\mathbb{C}$. Considerando $z = a + bi$ um número complexo, a é chamada de parte real de z e b é a parte imaginária de z . Quando $z = a + bi$ e $b = 0$, o número complexo z é um número real; quando $z = a + bi$, $a = 0$ e $b \neq 0$, o número complexo é chamado número imaginário puro. Exemplos:

a) Números complexos: $2 + 3i$; $-5 + 7i$; $0,5 - 2i$; $-10i$; 27 .

b) Números imaginários puros: $2i$; $-7i$; $0,6i$; $-i$.

Os números reais, portanto, podem ser considerados como números complexos. Temos, então: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Não se pode comparar dois números complexos da forma $a + bi$ com $b \neq 0$. Assim, um número complexo (não real) não é maior nem menor que outro complexo (não real). Pode-se apenas indicar se dois números complexos são iguais ou diferentes.

No conjunto dos números reais, equações como $x^2 + 1 = 0$ e $x^2 + 2x + 10 = 0$, não teriam solução. No entanto, no conjunto dos números complexos, as soluções dessas equações seriam, respectivamente, $\{-i, i\}$ e $\{-1-3i, -1+3i\}$.

Unidade 3- Números Reais

A necessidade de contar objetos levou à ideia abstrata do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Devido à necessidade de expressar contagem negativa (perda, prejuízo, etc.) chegou-se aos números inteiros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, o que fizemos foi uma ampliação do conjunto $\mathbb{N}$. A necessidade de considerar partes da unidade levou a formulação do conjunto dos números racionais,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$

Acontecendo dessa forma mais uma ampliação de nossa capacidade de medir. Assim, temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Entretanto, com a impossibilidade de representar a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários, usando números racionais, surgiu mais uma ampliação dos conjuntos numéricos. Juntando o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$, formamos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

3.1- Potências de um número real

Definição 1:

Seja b um número real.

a) Se n é um número natural então

$$b^n = b \cdot b \cdot \dots \cdot b \quad (n \text{ fatores iguais a } b).$$

b) Se $b \neq 0$ e m é um número inteiro negativo,

$$b^m = (b^{-1})^{-m} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b}.$$

Acima temos um produto com $-m$ fatores. Note que $-m > 0$.

c) Se $b \neq 0$ então $b^0 = 1$.

Observações:

i) Na definição 1, b é chamado a base e n , m e 0 (zero) são os expoentes.

ii) No item a, a base b é qualquer número real; nos itens b e c, a base é um número real diferente de zero ($b \neq 0$), devido à questão da abrangência dos números reais que servem de base.

iii) Não tem sentido matemático a expressão 0^0 .

Exemplos:

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-4} &= \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{625}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } (3, 12)^0 = \left(\frac{312}{100}\right)^0 = 1.$$

3.1.1- Propriedades da Potenciação

As propriedades da potenciação são consequências diretas das propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação de números reais.

Suponha que os números reais b e c e os números inteiros m e n , permitem definir todas as potências explicitadas a seguir.

$$\text{a) } b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

$$\text{b) } (b^m)^n = b^{mn}$$

$$\text{c) } b^m \div b^n = b^m \cdot \frac{1}{b^n} = b^m \cdot b^{-n} = b^{m-n}$$

$$\text{d) } (b \cdot c)^m = b^m \cdot c^m.$$

Exemplos:

$$a) (\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{9}{4}$$

$$b) ((\sqrt{2})^{-2})^{-3} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]^{-3} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$c) (\sqrt{2} - 5)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (-5) + (-5)^2 = \\ = 2 - 10\sqrt{2} + 25 = 27 - 10\sqrt{2}$$

O importante é entender o significado de uma expressão da forma r^a , em que r e a são números reais.

Conhecendo as propriedades básicas da multiplicação, pode-se compreender perfeitamente expressões do tipo r^n , em que r é um número real e n é um número inteiro não nulo.

Lembrete:

$$r^n = \underbrace{r \cdot \dots \cdot r}_{n \text{ fatores}}, n > 0;$$

$$r^n = \underbrace{r^{-1} \cdot \dots \cdot r^{-1}}_{-n \text{ fatores}}, \text{ sendo } n < 0, r \neq 0;$$

$$r^0 = 1, r \neq 0.$$



3.2- Raízes n-ésimas de números reais

Se r é um número real não-negativo e n é um número inteiro positivo, designa-se por $\sqrt[n]{r}$ ou $r^{\frac{1}{n}}$ o número real não-negativo cuja n -ésima potência é igual a r . Isto é, $(\sqrt[n]{r})^n = (r^{\frac{1}{n}})^n = r$.

Se r é um número real qualquer e n é um inteiro positivo ímpar, $\sqrt[n]{r}$ (ou $r^{\frac{1}{n}}$) é um número real, cuja n -ésima potência é igual a r .

Na expressão $\sqrt[n]{r}$ da raiz n -ésima de r , o número r é chamado o radicando, o símbolo $\sqrt{}$ é chamado radical e o número n é chamado o índice da raiz.

Quando $n = 2$, escreve-se $\sqrt{r}$ no lugar de $\sqrt[2]{r}$.

Exemplos:

a) $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$, pois $2^4 = 16$

b) A raiz quadrada de -2 não é um número real, pois o índice é um inteiro par e o radicando não é um número real não-negativo.

c) $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

Observação:

Observe que $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = 4$. No entanto, por definição, a raiz quadrada de um número não-negativo é um número não negativo. Assim, $\sqrt{4} = 2$ e não -2 .

Observando a equação $x^n = b$, em que n é um número natural e b , um número real; precisamos encontrar um ou mais números reais x tais que $b = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ (n fatores x).

Exemplos:

a) Encontre números reais x tais que $x^3 = -8$.

Solução:

A equação proposta tem como única solução $x = -2$, pois $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-8)$.

b) Encontre números reais x tais que $x^6 = 8$.

Solução:

Neste exemplo, as duas soluções possíveis são os números $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$.

De fato, $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ e

$(-\sqrt{2})^6 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Definição 2:

Seja b um número real. Então,

- a) Se $b > 0$ e n um número natural, a raiz n -ésima de b é o número real positivo que elevado à potência n resulta b .

Usamos a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a raiz n -ésima de b . Isto é, $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

- b) Se $b < 0$ e n é um número natural ímpar, a raiz enésima de b é o número real negativo que elevado a potência n resulta b .

Permanecemos com a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a n -ésima raiz de b . Então $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

- c) Se $b = 0$ e n é um número natural então a raiz enésima de $b = 0$ é o número zero. Isto é, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Observações:

- 1) Não definimos $\sqrt[m]{b}$, qualquer que seja o número real b , se m é um número inteiro e $m \leq 0$.
- 2) Na expressão $\sqrt[n]{b}$, o número b é o radicando, o símbolo $\sqrt{}$ é a raiz e n é o índice da raiz.
- 3) No caso $n = 2$, em vez de $\sqrt[2]{}$ escrevemos $\sqrt{}$ e lemos: “raiz quadrada”. Por exemplo, a igualdade $\sqrt{49} = 7$, lê-se “raiz quadrada de 49 é igual a 7”.
- 4) No caso $n = 3$, o símbolo $\sqrt[3]{}$ lê-se raiz cúbica. Por exemplo, a igualdade $\sqrt[3]{-125} = -5$ lê-se: “raiz cúbica de -125 é igual a -5 ”.

3.2.1- Propriedades da Radiciação

- a) Se a e b são números reais positivos e n é um número natural, então

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

- b) Se a é um número real negativo, b um número real positivo e n é um número natural ímpar, então

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

A verificação da validade das propriedades a) e b) é imediata. Note que

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (n \text{ fatores } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}).$$

Usando a propriedade comutativa do produto de números reais, organizamos o segundo membro para encontrar que

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{b} = \\&= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ é a raiz enésima de $a \cdot b$. Isto é, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Exemplos:

- a) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$. Pois, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$
- b) Não tem sentido $\sqrt{-4}$ quando trabalhamos com números reais. Uma vez que, não existe um número real x , tal que $x^2 = -4$.
- c) $\sqrt[5]{-32} = -2$. Pois $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.
- d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- e) $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -3\sqrt[3]{3}$.

Observações:

- Observe que $(-3)^2 = 9$ e $3^2 = 9$. No entanto $\sqrt{9} = 3$. É errado escrever $\sqrt{9} = -3$!! Pois para todo número real positivo b e todo número natural n , $\sqrt[n]{b}$ é, por definição, um número positivo.
- Sendo $\sqrt{9} = 3$ então tomando os números simétricos (ou multiplicando por -1) escrevemos $-\sqrt{9} = -3$.

Exemplos:

Verifique as seguintes igualdades:

- a) $\sqrt[3]{-250} = -5\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[5]{-512} = -2\sqrt[5]{16}$
- a) $\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{-2 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{2 \cdot (-5)^3} = -5\sqrt[3]{2}$
- b) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 2\sqrt[4]{3}$
- c) $\sqrt[5]{-512} = \sqrt[5]{-2^9} = \sqrt[5]{(-2)^5 \cdot 2^4} = -2\sqrt[5]{2^4} = -2\sqrt[5]{16}$

3.3- Potências racionais de números reais

Dado um número racional r pode-se supor que a fração que o representa é irredutível e o denominador é positivo. Ou seja, pode-se escrever r na forma, $r = \frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros primos entre si (sem fator comum) e $n > 0$.

Definição 3:

Sejam b um número real e $r = \frac{m}{n}$ tais que uma das condições é satisfeita:

a) $b^m < 0$ e n é um número natural ímpar. Ou b) $b^m > 0$

Então,

$$b^r = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Observação:

Em virtude das propriedades da radiciação vale:

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m.$$

Exemplos:

1) Calcule:

$$\text{a) } 16^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^4} = 4^{\frac{4}{4}} = 4^1 = 4.$$

$$\text{b) } (-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = \sqrt[3]{(-8)^3 \cdot (-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)^3} \cdot \sqrt[3]{(-8)^2} = -8 \sqrt[3]{64} = -8 \times 4 = -32.$$

$$\text{c) } (27)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

2) Mostre que valem as seguintes igualdades:

$$\text{a) } (-500)^{\frac{1}{3}} = -5 \sqrt[3]{4}$$

$$\text{b) } (-32)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{a) } (-500)^{\frac{1}{3}} = (-4 \cdot 5^3)^{\frac{1}{3}} = [4 \cdot (-5)^3]^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot (-5)^{\frac{3}{3}} = -5 \sqrt[3]{4}$$

$$\text{b) } (-32)^{-\frac{1}{5}} = (-2^5)^{-\frac{1}{5}} = [(-2)^5]^{-\frac{1}{5}} = (-2)^{-1} = \left(\frac{1}{-2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$$

Se $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $n > 0$, e r é um número real positivo, escrevemos $r^{\frac{m}{n}}$ para designar a raiz n -ésima de r^m :

$$r^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{r^m} = (r^m)^{\frac{1}{n}}, \quad r > 0.$$

Quando $m, n \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ e $n > 0$, definimos $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Quaisquer outras potências de 0 de expoente racional não estão definidas.

As propriedades e as regras para o cálculo com potências de expoente racional são as mesmas para o caso de expoentes inteiros. Em particular, se $r > 0$, temos $\sqrt[n]{r^m} = r^{\frac{m}{n}} = (r^m)^{\frac{1}{n}} = (r^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{r})^m$

3.4- Potências reais de expoente real

Qual é o significado da expressão x^a quando x e a são números reais? Se x é um número real positivo e a é um número irracional, o número x^a é aproximadamente igual a s^r , em que $r \in \mathbb{Q}$ é uma aproximação racional de a e $s \in \mathbb{Q}$ é uma aproximação racional de x .

A exatidão da definição de x^a depende da exatidão das aproximações de s para x e de r para a . Como o cálculo de x^a é feito aproximadamente com potências de expoente racional, continuam válidas todas as propriedades já conhecidas.

3.5- Propriedades das potências de expoente real

- i. $x^0 = 1$ para todo número real x positivo.
- ii. $0^a = 0$ para todo número real positivo a .
- iii. $1^a = 1$ para todo número real a .
- iv. Se $a, x \in \mathbb{R}$ e $x^a = 1$, então ocorre apenas uma das alternativas:
 - $x = 1$;
 - $x > 0$, $x \neq 1$ e $a = 0$;
 - $x = -1$ e a é um inteiro par.
- v. Se $a, x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $x^a > 0$.

vi. Se $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, com x e y positivos, então:

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b, \quad (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a, \quad (x^a)^b = x^{ab}.$$

vii. Se $x, y, a \in \mathbb{R}$ com $0 < x < y$ e $a > 0$, então $0 < x^a < y^a$.

Exemplos:

a. $\sqrt[3]{27^2} = 27^{2/3} = (27^{1/3})^2 = 3^2 = 9.$

b. Como $21.168 = 2^4 \times 3^3 \times 7^2$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{21.168} &= \sqrt[3]{2^4 \times 3^3 \times 7^2} = (2^4 \times 3^3 \times 7^2)^{1/3} \\ &= 2^{4/3} \times 3^{3/3} \times 7^{2/3} = 2 \times 2^{1/3} \times 3 \times 7^{2/3} \\ &= 6 \times (2 \times 7^2)^{1/3} = 6 \times 98^{1/3} = 6\sqrt[3]{98}.\end{aligned}$$

c. $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4/3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1+1/3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3^{1/3}}{4^{1/3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{4}}.$

Tal número pode ser escrito de uma forma esteticamente mais simples, multiplicando e dividindo por $\sqrt[3]{4^2}$. Isto é, multiplicando por $1 = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}$. Veja:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4^2}}{4\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4^2}} = \frac{3\sqrt[3]{3 \times 4^2}}{4\sqrt[3]{4 \times 4^2}} = \frac{3\sqrt[3]{3 \times 16}}{4\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3\sqrt[3]{48}}{4 \times 4} = \frac{3\sqrt[3]{48}}{16}.$$

Esse processo é conhecido como racionalização, pois o seu objetivo é converter o denominador, dado em termos de raízes, numa expressão sem raízes.

Observação:

Racionalizando expressões do tipo $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ ou $\frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$, com $b, c \geq 0$ e $b \neq c$.

As raízes nos denominadores destas expressões podem ser eliminadas fazendo uso da identidade:

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = b - c$$

Exemplos:

a) Racionalizar a expressão $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \sqrt{7}+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

O argumento geral é feito de maneira análoga:

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c} . \\ \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} &= \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c} .\end{aligned}$$

Exemplos:

$$a. \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2} = \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} .$$

$$b. \frac{2}{3-\sqrt{2}} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{7} .$$

c)

Se x é um número real positivo, como simplificar a expressão

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{(x^{2/3})^{5/4}}\right)^8} \quad ?$$

Solução:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\left(\sqrt{(x^{2/3})^{5/4}}\right)^8} &= \left(\left(\left((x^{2/3})^{5/4}\right)^{1/2}\right)^8\right)^{1/3} = x^{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{2^4 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^2}} = x^{\frac{2 \cdot 5}{3^2}} = x^{\frac{10}{9}} = x^{\frac{9+1}{9}} \\ &= x^{1+\frac{1}{9}} = x \cdot x^{\frac{1}{9}} \\ &= x \cdot \sqrt[9]{x} .\end{aligned}$$

d) Que valores podemos atribuir a x para que $\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ seja um número real?

Solução:

Segundo a definição da raiz n -ésima de um número real, para que a expressão proposta seja um número real, basta que o radicando $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ seja um número real. Para isto acontecer, o número x^2-1 deve ser diferente de zero.

Como $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, a equação $x^2-1 = 0$ equivale a:

$$x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0.$$

Isto é: $x=1$ ou $x=-1$.

Portanto, $x^2-1 \neq 0$ para todo número real x diferente de 1 e -1 .

Conclusão: $\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ é um número real para todo número real x diferente de 1 e -1 . Isto é,

$$\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R} \iff x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}.$$

e) Verifique que para todo

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n > 0, \text{ vale } 1^{m/n} = 1.$$

Solução:

$$1^{m/n} = (1^m)^{1/n} = 1^{1/n} = 1.$$

Como todo número real x pode ser aproximado por frações com denominadores arbitrários de precisão, obtemos a propriedade (iii) que enunciamos:

$$1^x = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Observação:

Sejam x um número real e r um número real positivo, então:



$$r^x = 1 \text{ com } r > 0 \text{ se, e somente se, } r = 1 \text{ ou } x = 0$$

Essa relação é muito importante e será de grande utilidade na resolução de diversas equações em que a variável aparece no expoente de expressões. A validade da expressão anterior se verifica da seguinte maneira:

- se $r = 1$, então $r^x = 1^x = 1$, pela propriedade (iii) .
- se $x = 0$, então $r^x = r^0 = 1$, pela propriedade (i), pois $r > 0$.

Reciprocamente, vejamos que, se $r^x = 1$, então $r = 1$ ou $x = 0$.

• Se $r^x = 1$ e $x \neq 0$, o número x^{-1} é um número real diferente de zero. Elevando ambos os lados da igualdade $r^x = 1$ ao expoente x^{-1} , obtemos a igualdade equivalente: $(r^x)^{x^{-1}} = 1^{x^{-1}}$.

Como $1^{x^{-1}} = 1$ pela propriedade (iii), e $(r^x)^{x^{-1}} = r^{x \cdot x^{-1}} = r^1 = r$, pela propriedade (vi), concluímos que: $r = 1$.

• Agora, se $r^x = 1$ e $r > 0$ é diferente de 1, devemos analisar os casos:

$$r > 1 \quad \text{ou} \quad 0 < r < 1.$$

Caso $r > 1$: se $x > 0$, usando as propriedades (vii) e (iii), temos $1 = r^x > 1^x = 1$, um absurdo. Logo, x não pode ser positivo.

Se $x < 0$, então $-x > 0$ e usando as propriedades (vii) e (iii), vemos que $r^{-x} > 1^{-x} = 1$.

Como $r^{-x} = \frac{1}{r^x} = \frac{1}{1} = 1$, chegamos ao absurdo $1 = r^{-x} > 1$.

Portanto, x não pode ser negativo.

Assim, a única alternativa que resta a x é a de ser igual a zero.

Caso $0 < r < 1$: se $x > 0$, então $1 = r^x < 1^x = 1$, em virtude das propriedades (vii) e (iii). Logo, x não pode ser positivo.

Se $x < 0$, então $-x > 0$. Usando de novo (vii), (iii) e $r^{-x} = \frac{1}{r^x} = \frac{1}{1} = 1$, obtemos $1 = r^{-x} < 1^{-x} = 1$. Desse absurdo, vemos que x não pode ser um número negativo.

Logo, para que r^x seja igual a 1, a única alternativa para o número x é $x = 0$, finalizando assim o nosso argumento.

Resumindo: Se $r, x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, então:

$r^x = 1 \text{ com } r > 0 \text{ se, e somente se, } r = 1 \text{ ou } x = 0.$
--

Exemplos:

a) Resolva a equação $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{x^3-4} = 1.$

Solução:

Como a base da potência é positiva, a identidade vale se, e somente se, $x^2 + \frac{1}{2} = 1$ ou $x^3 - 4 = 0$.

A identidade $x^2 + \frac{1}{2} = 1$ equivale a $x^2 = \frac{1}{2}$, ou seja, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Além disso, $x^3 - 4 = 0$ se, e somente se, $x = \sqrt[3]{4}$.

Portanto, as soluções da equação proposta são $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \sqrt[3]{4}$.

b)

Para quais valores de $x > 0$ vale a identidade $x^x = 1$?

Solução:

Sabe-se que a identidade vale quando a base x é igual a 1 ou o expoente de x é igual a zero com a base positiva. Portanto, $x > 0$ e $x^x = 1$ apenas quando $x = 1$.

c)

Para quais valores $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, vale que $(x+1)^{x-1} = 1$?

Solução:

Como $x > -1$, a base $x + 1$ é positiva. Logo, a igualdade verificada se, e somente se, a base $x + 1$ é igual a 1 ou o expoente $x - 1$ é igual a zero. Ou seja se, e somente se, $x + 1 = 1$ ou $x - 1 = 0$. Portanto, temos duas soluções: $x = 0$ ou $x = 1$.

d) Encontre as soluções no intervalo de $(-\infty, \frac{9}{2})$ da equação

$$(9 - 2x)^{\frac{1-x}{1+x}} - 1 = 0.$$

Solução:

Observe que

$$(9 - 2x)^{\frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Como $x < \frac{9}{2}$, temos $9 - 2x > 0$. Logo,

$$9 - 2x = 1 \text{ ou } \frac{1-x}{1+x} = 0.$$

A igualdade $9 - 2x = 1$ equivale a $9 - 2x + 2x - 1 = 1 + 2x - 1$, ou seja, $8 = 2x$ e, portanto, $x = 4$.

A expressão $\frac{1-x}{1+x}$ é igual a zero se, e somente se, o numerador é igual a zero, sendo o denominador não-nulo.

Ou seja, $1 - x = 0$, isto é, $x = 1$.

Note que $9 - 2 \times 1 = 7 \neq 0$.

Portanto, as soluções da nossa equação são $x = 4$ ou $x = 1$, ambas contidas no intervalo $(-\infty, \frac{9}{2})$.

3.6- Expressões numéricas

Uma expressão na qual aparecem números reais, operações entre os números e sinais convencionais de organização da ordem das operações é o que chamamos de uma expressão numérica real ou, simplesmente, expressão numérica.

As expressões numéricas podem ser definidas através de um conjunto de operações fundamentais. Para resolver expressões numéricas efetuamos primeiramente as potências e as raízes (na ordem que aparecerem), em seguida as operações de multiplicação e divisão, na ordem em que estas estiverem indicadas, e depois adições e subtrações.

Em expressões que aparecem sinais de reunião: (): parênteses, []: colchetes e { }: chaves, efetuam-se as operações eliminando-se, na ordem: parênteses, colchetes e chaves, isto é, dos sinais interiores para os exteriores.

Quando à frente do sinal de reunião estiver o sinal negativo, trocam-se todos os sinais dos termos internos.

A expressão numérica e, geralmente, o equacionamento da solução de um problema que se esteja resolvendo. Assim, diante de uma expressão algébrica, o objetivo é resolvê-la, achando o número real que a representa ou realizar operações para simplifica-la.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 + [2 - (3+2) - 1] &= 2 + [2 - (5) - 1] = 2 + [2 - 5 - 1] = 2 \\ &+ [2 - 6] = 2 + [-4] = 2 - 4 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 + \{3 - [1 + (2 - 5 + 4)] + 8\} &= 2 + \{3 - [1 + (-3 + 4)] \\ &+ 8\} = 2 + \{3 - [1 + (1)] + 8\} = 2 + \{3 - [2] + 8\} = 2 + \{3 - \\ &2 + 8\} = 2 + \{9\} = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \{2 - [3 * 4 : 2 - 2 (3 - 1)]\} + 1 &= \{2 - [12 : 2 - 2 (2)]\} \\ &+ 1 = \{2 - [12 : 2 - 2 (2)]\} + 1 = \{2 - [6 - 4]\} + 1 = \{2 - \\ &[2]\} + 1 = \{2 - 2\} + 1 = \{0\} + 1 = 1 \end{aligned}$$

d) $8 - [-(6 + 4) + (3 - 2 - 1)] =$ resolva primeiro os parênteses.

$$8 - [-10 + (1 - 1)] =$$

$$8 - [-10 + 0] =$$
 resolva os colchetes.

$$8 - [-10] =$$
 faça o jogo de sinais para eliminar o colchete.

$$8 + 10 = 18$$

O valor numérico da expressão é 18.

e) $-62 : (-5 + 3) - [-2 \cdot (-1 + 3 - 1)^2 - 16 : (-1 + 3)^2] =$ elimine os parênteses.

$$-62 : (-2) - [-2 \cdot (2 - 1)^2 - 16 : 2^2] =$$
 continue eliminando os parênteses.

$$-62 : (-2) - [-2 \cdot 1 - 16 : 2^2] =$$
 resolva as potências dentro do colchetes.

$$-62 : (-2) - [-2 * 1 - 16 : 4] =$$
 resolva as operações de multiplicação e divisão nos colchetes.

$$-62 : (-2) - [-2 - 4] =$$

$$-62 : (-2) - [-6] =$$
 elimine o colchete.

$$-62 : (-2) + 6 =$$
 efetue a potência.

$$31 + 6 = 37$$
 efetue a adição.

O valor numérico da expressão é 37.

f)

$$\left\{ -2\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{5} - \frac{1}{6} \right) \times 3 + 5^2 \right] \div 2 \right\} \times 5$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{3-1}{6} + \sqrt[3]{5} \right) \cdot 3 + 25 \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{3} + \sqrt[3]{5} \right) \cdot 3 + 25 \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[1 + 3 \cdot \sqrt[3]{5} + 25 \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[26 + 3 \cdot \sqrt[3]{5} \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\sqrt[3]{5} + 13 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5} \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\sqrt[3]{5} + 13 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5} \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ \frac{-4+3}{2}\sqrt[3]{5} + 13 \right\} \times 5 = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + 13 \right\} \times 5 = \\
&= \frac{-5}{2}\sqrt[3]{5} + 65.
\end{aligned}$$

3.7- Relação de ordem entre números reais

A representação dos números reais sobre uma reta orientada aparecem de forma organizada possibilitando comparar a ordem de grandeza de dois números por suas posições.

Ao fazermos a representação dos números reais sobre uma reta horizontal eles crescem, da esquerda para a direita e, logicamente, decrescem da direita para a esquerda. Se a reta, representando os números reais, fosse posicionada verticalmente, a representação dos números reais seria crescente para cima e decrescente para baixo.

Considere os números reais representados sobre a reta real orientada conforme figura 1 abaixo.

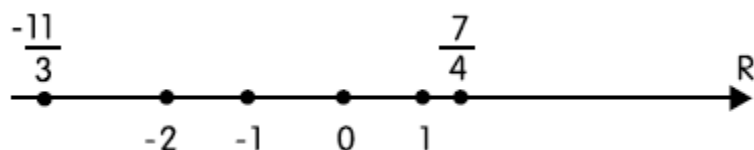


Figura 1 – Números reais sobre a reta

Dados dois números reais a e b representados sobre a reta dizemos que $a < b$, para significar que o sentido que vai de a para b coincide com a orientação da reta.

A expressão $a < b$ é uma desigualdade e lê-se “ a é menor do que b ”. Observando a Figura 1, conclui-se que

$$-\frac{11}{3} < -2, \quad 0 < \frac{7}{4}, \quad -2 < -1.$$

Se $a < b$, equivalentemente, pode-se escrever que $b > a$, lê-se “ b é maior do que a ”. As notações $x \leq y$ e $z \geq w$ são permitidas entre os números reais x , y , z e w .

A expressão $x \leq y$ indica que o número x é menor do que ou igual ao número y . A expressão $z \geq w$ mostra que o número z é maior do que ou igual a w .

A relação de ordem introduzida nos números reais apresenta algumas propriedades. Para o enunciado das propriedades considerar que a , b e c são números reais arbitrários.

P.1: Entre dois números reais a e b apenas uma das três possibilidades ocorre:

$$a < b \quad \text{ou} \quad a > b \quad \text{ou} \quad a = b.$$

Como identificar entre dois números reais qual deles é o maior ou menor?

1º caso: Os números possuem sinais contrários. Exemplificando: a é negativo e b é positivo. Nesse caso, o número negativo é menor ($a < b$).

2º caso: Um dos números é zero. Exemplificando: $a = 0$. Nesse caso, $a < b$ se b for positivo ou $a > b$ se b for negativo.

3º caso: Os números possuem o mesmo sinal. Nesse caso precisamos considerar a expansão decimal.

Supor, inicialmente, que a e b são positivos. Então:

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

Nessas expansões estamos supondo a possibilidade que a partir de um certo índice todos os dígitos sejam nulos. Nessa situação, $a < b$ se uma das seguintes situações antecederem:

- 1) $a_0 < b_0$ ou 2) existe um número natural k tal que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k < b_k$.

Exemplo: $3, 0125 < 3, 01312111\dots$

Por outro lado, se a e b forem negativos, então:

$$a = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad b = -b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

Nessas expansões considerando também a possibilidade de que a partir de certo índice todos os algarismos sejam nulos. Nessa situação, $a < b$ se uma das seguintes situações acontecerem:

$$1) a_0 > b_0 \quad \text{ou} \quad 2) \text{ existe um número natural } k \text{ tal que } a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1} \text{ e } a_k > b_k.$$

P.2: Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Exemplo: $-13 < 5$ e $5 < 25 \rightarrow -13 < 25$.

P.3: Se $a < b$ então $a + c < b + c$.

Obs.: P.3 é útil para resolver inequações.

Exemplo:

Determinar todos os valores inteiros que satisfazem a desigualdade $x - 12 < -9$.

Solução:

$$x - 12 < -9 \rightarrow x - 12 + 12 < -9 + 12 \rightarrow x < 3.$$

Logo, os valores são $x = 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$.

P.4: Se $a < b$ e $c > 0$ então $a \cdot c < b \cdot c$.

Obs.: Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo, a desigualdade permanece.

$$\text{Exemplo: } -250 < -32 \rightarrow -250 \cdot 2 < -32 \cdot 2 \rightarrow -500 < -64$$

P.5: Se $a < b$ e $c < 0$ então $a \cdot c > b \cdot c$.

Obs.: Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo, a desigualdade inverte de sentido.

$$\text{Exemplo: } -250 < -32 \rightarrow -250 \cdot (-2) > -32 \cdot (-2) \rightarrow 500 > 64$$

3.8- Intervalos reais

Intervalo é qualquer subconjunto de números reais definido através de uma desigualdade.

i) Intervalo aberto de extremo a e b.

$$] a, b [= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$\text{Exemplo: }] 7, 9 [= \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 9\}$$



ii) Intervalo fechado de extremos a e b.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$\text{Exemplo: } [7, 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 9\}$$



iii) Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos a e b.

$$[a, b [= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$\text{Exemplo: } [7, 9 [= \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x < 9\}$$



iv) Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos a e b.

$$] a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$\text{Exemplo: }] 7, 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x \leq 9\}$$



v) Intervalos Infinitos

a) Intervalo de $-\infty$ até n, fechado em n.

$$]-\infty, n] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq n\}$$

$$\text{Exemplo: }]-\infty, 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$$



b) Intervalo de $-\infty$ até n , aberto em n .

$$]-\infty, n[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < n\}$$

$$\text{Exemplo: }]-\infty, 9[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 9\}$$



c) Intervalo de n até $+\infty$, fechado em n .

$$[n, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$$

$$\text{Exemplo: } [9, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$$



d) Intervalo de n até $+\infty$, aberto em n .

$$]n, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > n\}$$

$$\text{Exemplo: }]9, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$$



Observações:

a) Na representação geométrica de um intervalo (reta real), a bolinha vazia indica que o intervalo é aberto e que o elemento não pertence ao conjunto. Já bolinha cheia indica que o intervalo é fechado e o elemento pertence ao conjunto.

b) Para representar que o intervalo é aberto podemos usar $()$ ou $] [$.

c) Na definição de um intervalo, o número que fica no extremo esquerdo é menor que o número que fica no extremo direito. Assim, $] 2, 6 [$ é um intervalo, mas $] 6, 2 [$ não tem sentido.

d) Se a é um número real pode-se usar os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ para expressar intervalos infinitos.

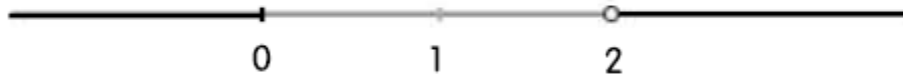
e) Usando o recurso de representar subconjuntos da reta por intervalos, podemos escrever: $]-\infty, +\infty[= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Exemplos:

a) $[2, 3] = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 3\}$

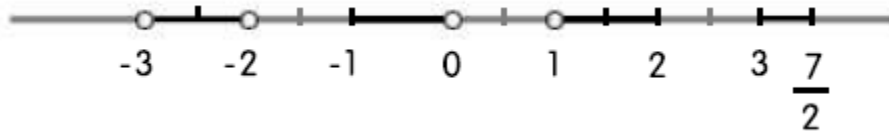
b) $[3, 7) = \{x \in \mathbb{R}; 3 \leq x < 7\}$

c) Representar graficamente os intervalos $(2, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$.



d) Representar graficamente os intervalos :

$$(-3, -2), [-1, 0), (1, 2] \text{ e } \left[3, \frac{7}{2}\right]$$



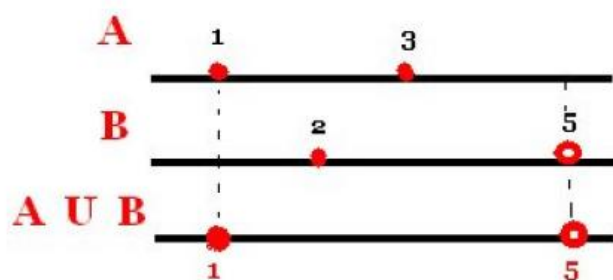
3.8.1- Operações com Intervalos

As operações de União, Interseção e Diferença de intervalos obedecem às mesmas definições dadas para operações com conjuntos, sendo que, preferencialmente, devem ser feitas através da representação geométrica desses intervalos.

a) **UNIÃO DE INTERVALOS** – É o intervalo formado por todos os elementos que pertençam a um dos intervalos ou ao outro intervalo.

Exemplo:

Sejam os intervalos $A = [1, 3]$; $B = [2, 5]$. A união desses intervalos será representada graficamente:

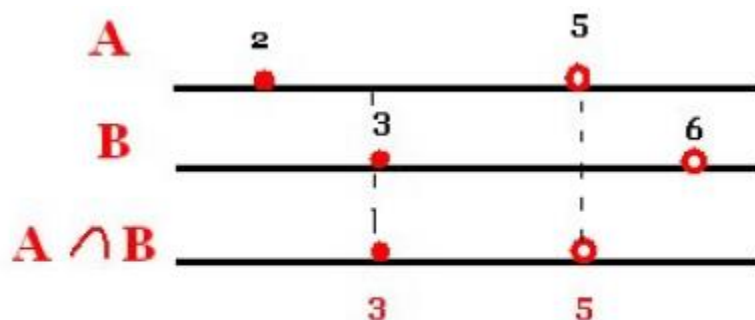


Logo, $A \cup B = [1, 5]$

b) INTERSEÇÃO DE INTERVALOS – É o intervalo formado pelos elementos comuns aos dois intervalos.

Exemplo:

Sejam os intervalos $A = [2, 5]$ e $B = [3, 6]$. A interseção desses intervalos será representada graficamente:

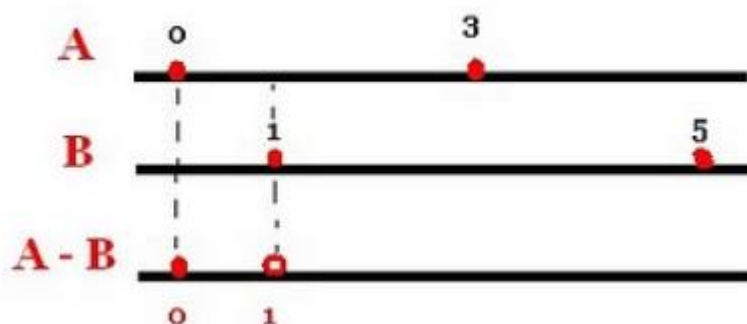


Logo, $A \cap B = [3, 5]$

c) DIFERENÇA DE INTERVALOS ($A - B$) – É o intervalo formado pelos elementos que pertencem ao intervalo **A** mas que não pertencem ao intervalo **B**.

Exemplo:

Sejam os intervalos $A = [0, 3]$ e $B = [1, 5]$. A diferença $A - B$ será o intervalo $[0, 1)$. Observe que a extremidade 1 ficou aberta na resposta por pertencer ao intervalo **B** e, pela definição, a diferença $A - B$ deve ser formada apenas pelos elementos que estão no intervalo **A** mas NÃO ESTÃO no intervalo **B**.



Logo, $A - B = [0, 1)$

3.9- Inequações de uma variável real

Inequações são expressões em que aparecem números, desigualdades e uma variável frequentemente representada por x . A inequação define todos os valores reais que podem ser assumidos pela variável.

Resolver a inequação é explicitar o subconjunto de números reais no qual a variável pode assumir valores, de modo que a inequação seja satisfeita. A linguagem dos intervalos é muito útil para expressar o conjunto solução de uma inequação.

Exemplos:

Encontre o conjunto solução das inequações abaixo.

a) $6 - 2x \leq 8x$

Solução:

$$6 - 2x \leq 8x \Rightarrow 6 \leq 8x + 2x \Rightarrow 6 \leq 10x$$

$$\frac{6}{10} \leq x \Rightarrow x \geq \frac{3}{5}.$$

Logo o conjunto solução da inequação é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{3}{5} \right\} = \left[\frac{3}{5}, \infty \right).$$

b) $-x^2 + x > -6$

Solução:

Multiplicando ambos os da inequação por -1 e invertendo o sinal da desigualdade, a inequação é equivalente a

$$x^2 - x < 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - x - 6 = 0$, encontramos

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \Rightarrow \Delta = 25.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

Logo:

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -2.$$

Sabendo que

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Assim, a inequação que precisamos resolver é

$$(x - 3)(x + 2) < 0.$$

$$S = (-\infty, 3) \cap (-2, \infty) = (-2, 3).$$

c) Para que valores reais de x a desigualdade abaixo faz sentido e é verdadeira.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 0.$$

Solução:

Primeiramente é preciso que $x \neq 1$ e $x \neq -1$ para que façam sentido as frações que aparecem na desigualdade. Podemos escrever:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0.$$

Para que a desigualdade seja verdadeira é suficiente que

$$(x - 1)(x + 1) > 0.$$

	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$(x - 1)$		-	-	+
$(x + 1)$		-	+	+
$(x - 1)(x + 1)$		+	-	+

$$S = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} - [-1, 1].$$

3.9.1- Proposição Sobre Desigualdades de Números Reais

Sejam a e b números reais positivos. Então $a < b$ se e somente se $a^2 < b^2$.

Prova: Em símbolos, a proposição garante que para números reais positivos a e b

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2.$$

Outra maneira de escrever a equivalência é

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0.$$

Veja como ainda podemos melhorar o retrato de nossa equivalência:

$$a - b < 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) < 0.$$

A proposição traduzida na forma desta última equivalência pode agora ser provada.

Como a e b são positivos, então temos mais uma informação:

$$a + b > 0.$$

Isto deixa evidente que

$$a - b < 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) < 0$$

e que

$$(a - b)(a + b) < 0 \Rightarrow (a - b) < 0.$$

3.10- Módulo de um Número Real

Dado um número real x , o módulo x , representado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Exemplos:

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad \left| -\frac{1}{2} \right| = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |0| = 0.$$

3.10.1- Propriedades básicas do módulo

i) Para um número real x , $|x| \geq 0$ e $|x| \geq x$.

Comentários:

Propriedade 1. Retorne com atenção à definição de módulo de um número real. Veja que na coluna após a chave estão escritos números positivos nas duas primeiras linhas e o número zero na terceira linha. Isto mostra que o módulo é sempre positivo ou nulo. Isto é $|x| \geq 0$ para qualquer x . Também se x for positivo então $|x| = x$ e no caso de x negativo ou nulo então $|x| \geq x$.

ii) Se x, y são números reais então $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Comentários:

Propriedade 2. Veja que se um dos números x ou y for nulo, então a igualdade é verdadeira. Precisamos mostrar, portanto, a validade da igualdade nos casos em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

x	+	-	+	-
y	-	+	+	-
x.y	-	-	+	+

Para a primeira coluna temos que $x \cdot y < 0$. Logo, $|x \cdot y| = -x \cdot y = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Para a segunda coluna temos que $x \cdot y < 0$. Logo, $|x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$.

Para a terceira coluna temos que $x \cdot y > 0$. Logo, $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

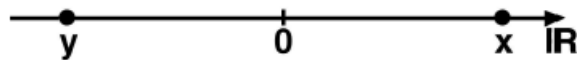
Para a quarta coluna, temos que $x \cdot y > 0$. Logo, $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

iii) Se x, y são números reais e $y \neq 0$, então

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

3.10.2- Caracterização Geométrica do módulo

Para caracterizar geometricamente o módulo de um número será usada a representação dos números reais sobre uma reta. Na reta abaixo foram localizados os números reais x e y , com $x > 0$ e $y < 0$.



Como $x > 0$, então $|x| = x$. Por outro lado, como $y < 0$, então $|y| = -y$.

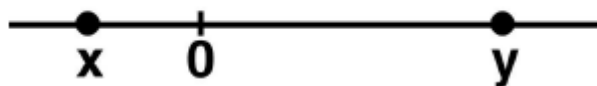
$|x|$ e $|y|$ representam, respectivamente, a medida da distância de x até a origem O ou de y até a origem O .

iv) Sejam x e y números reais representados geometricamente na reta real.

Então $|x - y| = d(x, y)$, em que $d(x, y)$ significa a distância do ponto x ao ponto y , ou $d(x, y)$ é o comprimento do segmentos cujos extremos são os pontos x e y .

Prova:

$|x - y| = d(x, y)$, com $x < 0$ e $y > 0$.



Como $x < 0$ e $y > 0$ então $x - y < 0$. Logo

$$|x - y| = -(x - y) = y - x = |y| + |x|.$$

3.11- Desigualdade triangular

Proposição: Sejam a e b números reais quaisquer. Então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Prova: Deve-se observar que a desigualdade vale se um dos números ou os dois são nulos. Vamos demonstrar a validade de a desigualdade triangular examinando as várias possibilidades de sinais para os números a e b .

	sinal de a	sinal de b
caso 1	+	+
caso 2	-	-
caso 3	+	-
caso 4	-	+

Caso 1: $a > 0$ e $b > 0$. Neste caso $a + b > 0$ e podemos escrever

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|, \text{ isto é, } |a + b| = |a| + |b|,$$

o que prova a desigualdade triangular no caso 1.

Caso 2: $a < 0$ e $b < 0$. Neste caso $a + b < 0$ e então,

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|, \text{ isto é, } |a + b| = |a| + |b|,$$

o que prova a desigualdade triangular no caso 2.

Caso 3: $a > 0$ e $b < 0$. Neste caso temos que trabalhar com duas possibilidades: $a + b \geq 0$ ou $a + b < 0$. Na primeira situação $a + b \geq 0$, escrevemos

$$|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b|.$$

Então,

$$|a + b| = |a| - |b| < |a| - |b| + 2|b| = |a| + |b|.$$

Na segunda situação $a + b < 0$, escrevemos

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = -|a| + |b|.$$

Logo,

$$|a + b| < -|a| + 2|a| + |b| = |a| + |b|.$$

Em ambas as situações, a desigualdade é verificada.

Caso 4: $a < 0$ e $b > 0$

A prova do caso 4 é muito parecida com a do caso 3. Basta trocar a com b .

A desigualdade triangular pode ser expressa de outras maneiras. Por exemplo:

Para quaisquer números reais a e b valem as desigualdades a seguir:

i) $|a| - |b| \leq |a - b|$

ii) $|b| - |a| \leq |a - b|$

Prova i:

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Logo

$$|a| - |b| \leq |a - b|;$$

Prova ii:

A desigualdade básica é $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Note que $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$.

Logo,

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

3.12- Inequação com módulo

Exemplos:

a) Determine o conjunto de números reais, tais que $|x + 1| < 5$.

Solução:

Usando a definição de módulo, essa desigualdade corresponde a duas desigualdades: $x + 1 < 5$ e $-(x + 1) < 5$. Ou seja, $x < 4$ e $x > -6$. Logo, o conjunto solução é $S = (-6, 4)$.

b) Determine o conjunto solução da inequação $|x - 1| > 6$.

Solução:

A desigualdade é equivalente a $x - 1 > 6$ e $-(x - 1) > 6$.

Ou seja, $x > 7$ e $x < -5$. Portanto, o conjunto solução é formado pela união de dois intervalos abertos infinitos: $(-\infty, -5) \cup (7, +\infty)$.

c) Determine o conjunto solução da inequação $|x + 1| < |x - 1|$.

Solução: Precisamos identificar todos os números reais x tais que a distância até -1 é inferior à distância até 1 .

1º caso: $x > 1$

Neste caso, $x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0$ e a equação se torna $x + 1 < x - 1 \rightarrow 1 < -1$, o que é um absurdo.

2º caso: $-1 \leq x \leq 1$

Neste caso, $x + 1 \geq 0$ e $x - 1 \leq 0$ e a equação se torna $x + 1 < -(x - 1) \rightarrow 2x < 0 \rightarrow x < 0$. Logo, $-1 \leq x < 0$ é a solução.

3º caso: $x < -1$

Neste caso, $x + 1 < 0$ e $x - 1 < 0$ e a equação se torna $-(x + 1) < -(x - 1)$. Ou seja, $-1 < 1$. Logo, todo $x < -1$ verifica a desigualdade. Juntando as possibilidades do 2º e 3º casos temos que $S = [-1, 0) \cup (-\infty, -1) = (-\infty, 0)$ é a solução.

d) Resolva $|2x+1| < 3$.

Solução:

$$-3 < 2x+1 < 3 \rightarrow -4 < 2x < 2 \rightarrow -2 < x < 1.$$

$$S = (-2, 1)$$

e) Resolva $|4x-3| > 5$

Solução:

$$4x - 3 > 5 \rightarrow x < -1/2 \text{ ou } 4x - 3 < -5 \rightarrow x > 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -1/2 \text{ ou } x > 2\}$$

Exercícios Propostos

1) Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

a) $|3x - 2| < 4$

c) $|4 - 3x| \leq 5$

e) $|2x + 4| < -3$

g) $|5x + 4| \geq 4$

b) $|2x - 3| \leq 1$

d) $|3x + 4| \leq 0$

f) $|2x - 1| > 3$

h) $|2 - 3x| \geq 1$

2) Resolver as inequações seguintes em $\mathbb{R}$:

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$

b) $|x^2 - x - 4| > 2$

c) $|x^2 - 5x| \geq 6$

d) $|x^2 - 3x - 4| \leq 6$

e) $\left| \frac{2x-3}{3x-1} \right| > 2$

f) $\left| \frac{x+1}{2x-1} \right| \leq 2$

Respostas

1) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 3\}$

d) $S = \{-\frac{4}{3}\}$

e) $S = \emptyset$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geq 0\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 1\}$

2) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

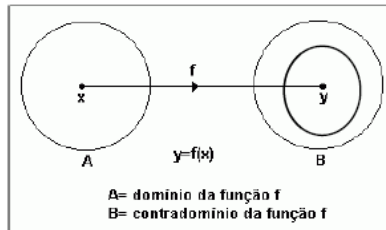
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 5\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \text{ e } x \neq \frac{1}{3}\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{5} \text{ ou } x \geq 1\}$

Unidade 4- Funções

Dados os conjuntos A e B , uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y = f(x) \in B$.



Função é uma expressão matemática que relaciona dois valores pertencentes a conjuntos diferentes, mas com relações entre si. A lei de formação que intitula uma determinada função possui três características básicas: domínio, contradomínio e imagem. Essas características podem ser representadas por um diagrama de flechas

Observações:

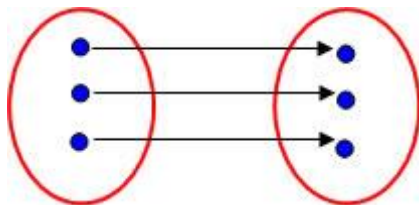
Domínio (D): Conjunto A (conjunto de partida).

Contradomínio (CD): Conjunto B (conjunto de chegada).

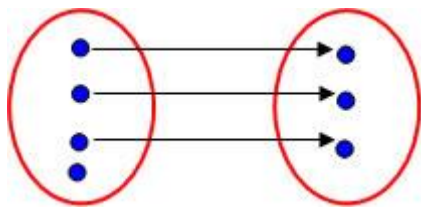
Imagem (Im): Conjunto constituído pelos elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A).

O conjunto domínio possui algumas características especiais que definem ou não uma função. Todos os elementos do conjunto domínio devem possuir representação no conjunto do contradomínio. Caso isso não ocorra, a lei de formação não pode ser uma função.

É função : Todos os elementos do domínio possuem um único correspondente no contradomínio.



Não é uma função: Existe elemento do domínio não possui correspondente no contradomínio.



Não é função: Existe elemento do domínio que possui mais de uma imagem.

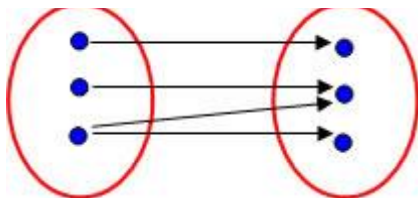


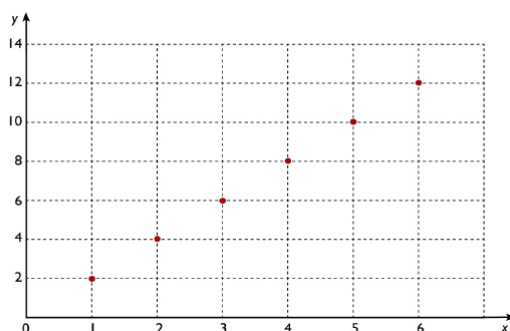
Gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$

Exemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$f(x) = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = 2x\}$$

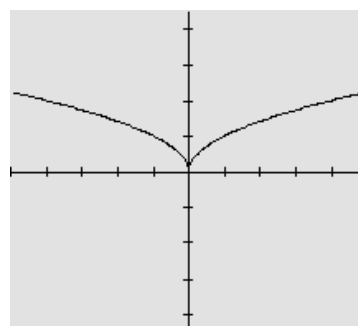
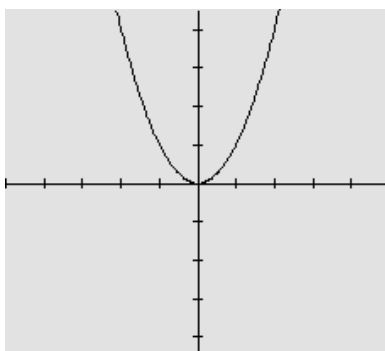


1) Paridade das funções

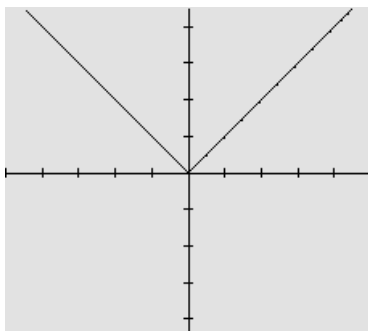
Seja A um conjunto tal que $x \in A \rightarrow -x \in A$ e a função $f: A \rightarrow B$.

f é par $\rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in A \rightarrow$ o gráfico é simétrico em relação ao eixo OY (eixo vertical), pois $(x, y) \in f \rightarrow (-x, y) \in f$.

Exemplos de funções pares:

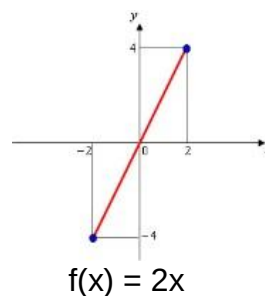


$$f(x) = x^2$$



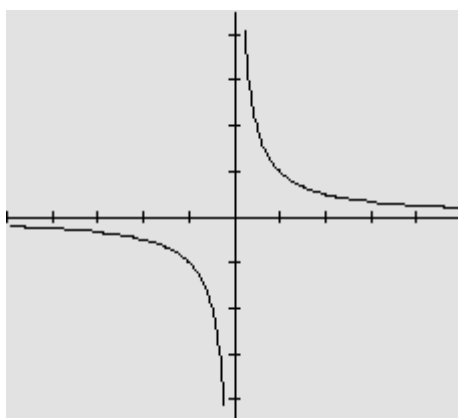
$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

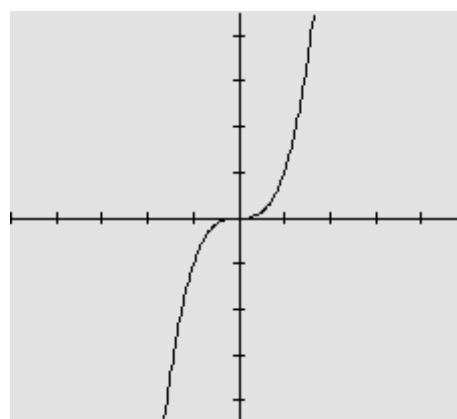


f é ímpar $\rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in A \rightarrow$ o gráfico é simétrico em relação à origem, pois $(x, y) \in f \rightarrow (-x, -y) \in f$.

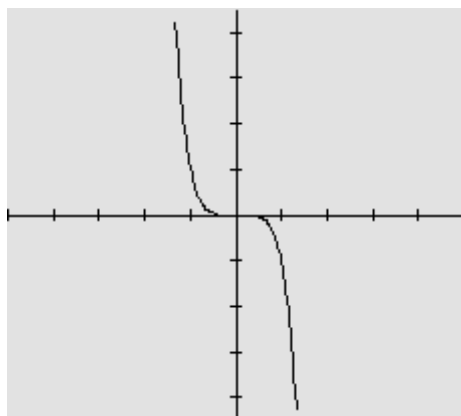
Exemplos de funções ímpares:



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = x^3$$



$$f(x) = -x^5$$

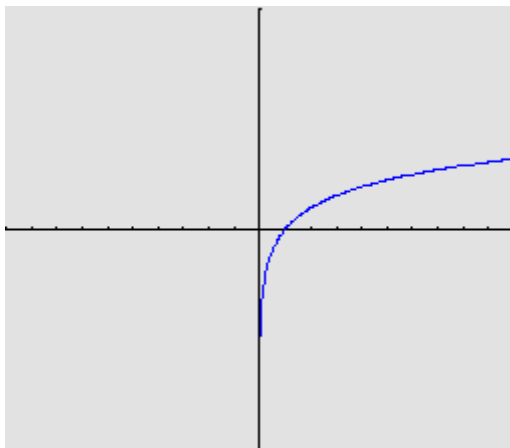
Observações:

Definição: Uma função f é denominada par quando $f(x)=f(-x)$, para todo x do Dom f .

Definição: Uma função f é denominada ímpar quando $f(x)=-f(-x)$, para todo x do Dom f .

No entanto, há funções cujos gráficos não possuem essas características.

Exemplo: $f(x) = \ln x$.

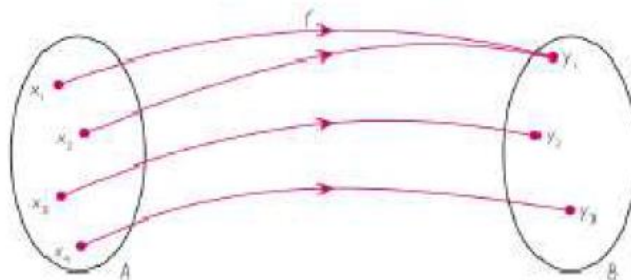


4.1- Tipos de Funções

Seja a função $f: A \rightarrow B$.

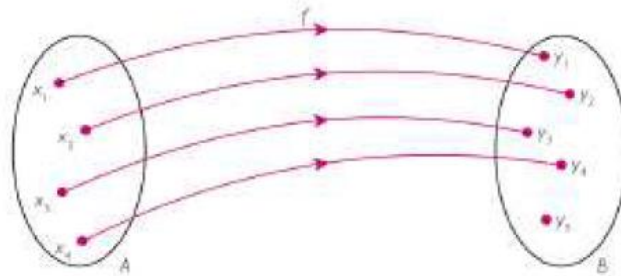
i) Função Sobrejetora

A função f é denominada de sobrejetora quando todo elemento de B está associado a pelo menos um elemento de A , ou seja, quando o conjunto imagem é igual ao contradomínio dessa função. Utilizando diagramas para representar essa função, todo elemento de B recebe seta.



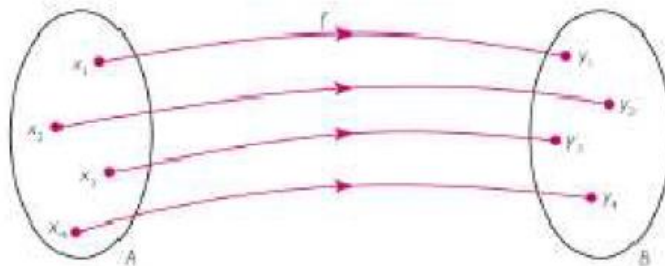
ii) Função Injetora

A função f é denominada de injetora quando elementos distintos de A estão associados a elementos distintos de B . Utilizando diagramas para representar essa função, não há elemento de B que receba mais de uma seta.



iii) Função Bijetora

A função f é denominada de bijetora se, e somente se, for sobrejetora e injetora. Todo elemento de B está associado a um único elemento de A . No diagrama todo elemento de B recebe uma única seta.



Exemplos:

1) Considere três funções f , g e h , tais que

- A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade.
- A função g atribui a cada país, a sua capital.
- A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Pode – se afirmar que, das funções dadas, são injetoras

- A) f , g e h .
- B) f e h .
- C) g e h .
- D) Apenas h .
- E) n d a.

Solução:

Sabemos que numa função injetora, elementos distintos do domínio, possuem imagens distintas, ou seja:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Logo, podemos concluir que:

f não é injetora, pois duas pessoas distintas podem ter a mesma idade.

g é injetora, pois não existem dois países distintos com a mesma capital.

h é injetora, pois dois números naturais distintos possuem os seus dobros também distintos.

Concluimos que a alternativa correta é a de letra C.

2) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) tal que $f(x - 5) = 4x$.

Nessas condições, pede-se determinar $f(x + 5)$.

Solução:

Vamos fazer uma mudança de variável em $f(x - 5) = 4x$, da seguinte forma: $x - 5 = u \Rightarrow x = u + 5$

Substituindo agora $(x - 5)$ pela nova variável u e x por $(u + 5)$, vem:

$$f(u) = 4(u + 5) \Rightarrow f(u) = 4u + 20$$

Ora, se $f(u) = 4u + 20$, teremos:

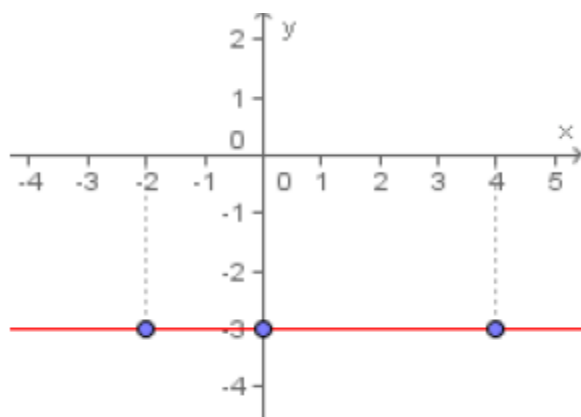
$$f(x + 5) = 4(x + 5) + 20 \Rightarrow f(x + 5) = 4x + 40$$

iv) Função Constante

Toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na forma $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$ é denominada função constante. Em uma função constante, todos os elementos do domínio terão sempre a mesma imagem.

Exemplo:

$$f(x) = -3$$



Nesse exemplo, a constante k possui o valor -3 . Observando os pontos $(-2, -3)$, $(0, -3)$ e $(4, -3)$ destacados no gráfico, pode-se ver que eles possuem abscissas diferentes, no entanto, todos os três possuem a mesma ordenada. O gráfico de qualquer função constante definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será sempre uma reta paralela ao eixo OX , que passa pelo ponto $(0, k)$.

Exemplos:

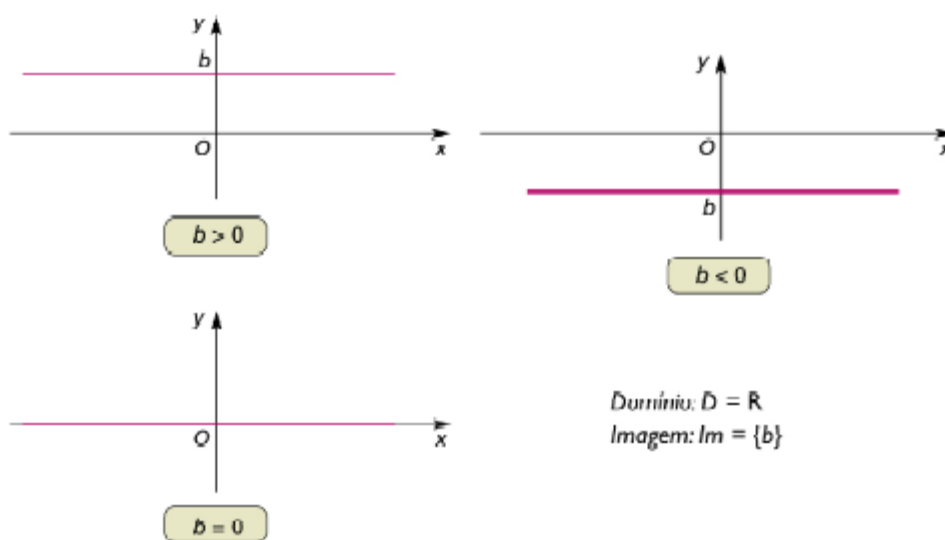


Diagrama de Flechas da Função Constante

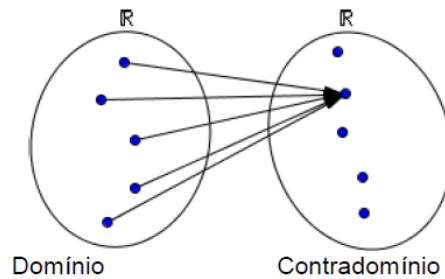
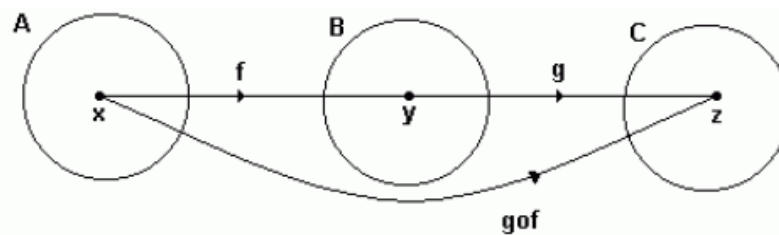


Imagem: Constante, ou seja, sempre a mesma.

v) Função Composta

Dados os conjuntos A , B e C e as funções $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ e $g: B \rightarrow C$ definida por $z = g(y)$, denomina-se função composta de g com f a função $h = (g \circ f): A \rightarrow C$ definida por $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Exemplo:

Sejam f e g duas funções tais que $f(g(x)) = 2x + 1$ e $g(x) = 2 - x$, então $f(x)$ é

- A) $2 - 2x$
- B) $3 - 3x$
- C) $2x - 5$
- D) $5 - 2x$
- E) nda

SOLUÇÃO:

Sejam $f(g(x)) = 2x + 1$, temos: $f[g(x)] = 2x + 1$

Substituindo $g(x)$ pelo seu valor, fica: $f(2 - x) = 2x + 1$

Fazendo uma mudança de variável, podemos escrever

$2 - x = u$, sendo u a nova variável.

Portanto, $x = 2 - u$.

Substituindo, fica:

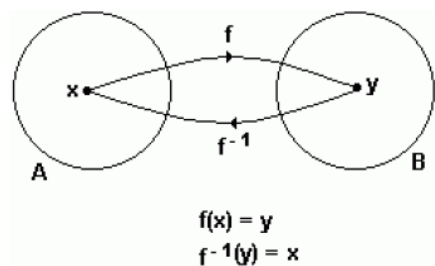
$$f(u) = 2(2 - u) + 1 \quad f(u) = 5 - 2u$$

Portanto, $f(x) = 5 - 2x$, o que nos leva à alternativa D.

vi) Função Inversa

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, se f é bijetora, então define – se a função inversa f^{-1} como sendo a função de B em A , tal que $f^{-1}(y) = x$.

Veja a representação a seguir.



Observa – se que

- a) para obter a função inversa, basta permutar as variáveis x e y .
- b) o domínio de f^{-1} é igual ao conjunto imagem de f .
- c) o conjunto imagem de f^{-1} é igual ao domínio de f .
- d) os gráficos de f e de f^{-1} são curvas simétricas em relação à reta $y = x$, ou seja, à bissetriz do primeiro quadrante.

Exemplo:

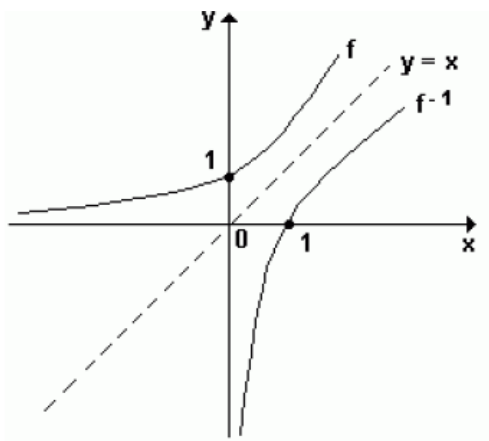
- a) Determine a inversa da função definida por $y = 2x + 3$.

Solução:

Permutando as variáveis x e y , fica: $x = 2y + 3$.

Isolando y em função de x , vem: $2y = x - 3 \rightarrow y = \frac{x-3}{2}$, que define a função inversa da função dada.

O gráfico abaixo representa uma função e sua inversa.



Observa – se que as curvas representativas de f e de f^{-1} são simétricas em relação à reta $y = x$, bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

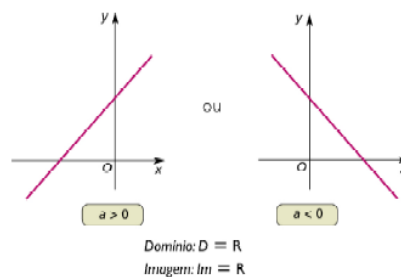
4.2- Função Polinomial do 1º Grau ou Função Afim

Função Polinomial de 1º grau, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$, em que a e $b \neq 0$.

a: coeficiente angular

b: coeficiente linear.

Gráfico: reta que intersecta o eixo y no valor de b e o eixo x no valor de $-\frac{b}{a}$.



Exemplos:

- 1) $f(x) = 2x + 1$ ($a = 2$, $b = 1$)
- 2) $f(x) = -x + 4$ ($a = -1$, $b = 4$)
- 3) $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$ ($a = \frac{1}{3}$, $b = 5$)
- 4) $f(x) = 4x$ ($a = 4$, $b = 0$)

Valor Numérico de uma Função Afim

Na função $f(x) = 5x + 1$, determinar.

- a) $f(-1) = 5 \cdot (-1) + 1 = -4$
- b) $f(3) = 5 \cdot (3) + 1 = 15 + 1 = 16$

4.2.1 - Raiz ou zero da Função Afim

Raiz ou zero da função é o valor de x para o qual a função é igual a zero.

$$Y = f(x) = 0$$

Observações:

- Para a função afim, o zero da função é dado por $ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$.
- No caso da função linear $y = ax$, o zero da função é $x = 0$.

Exemplos:

- 1- Obtenha o zero da função $f(x) = 2x - 5$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Logo, a raiz da função, ou zero, é igual a $\frac{5}{2}$.

2- Calcule a raiz da função $g(x) = 3x + 6$.

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

Logo, a raiz da função é igual a - 2.

3- Calcule a abscissa do ponto em que o gráfico de $h(x) = -2x + 10$ corta o eixo das abscissas.

O ponto em que o gráfico corta o eixo dos x é aquele em que $h(x) = 0$, então:

$$h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$$

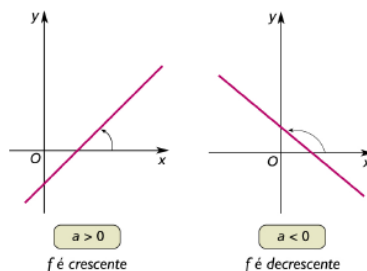
Logo, o valor de x para que a função toque o eixo das abscissas é igual a 5.

4.2.2- Crescimento e Decrescimento

As funções afim $f(x) = ax + b$ e a linear $f(x) = ax$ podem ser crescentes ou decrescentes.

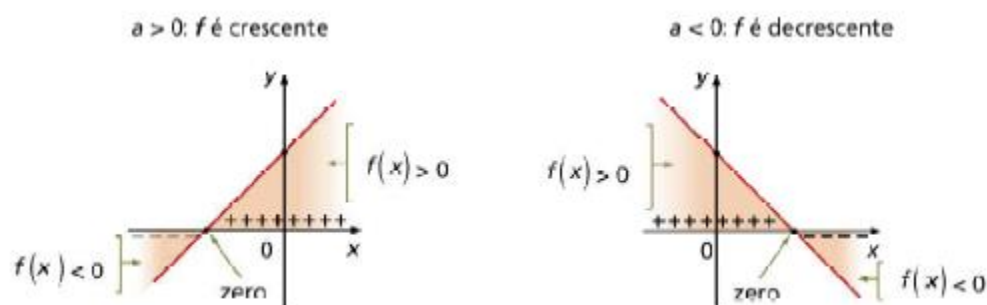
Se $a > 0$: a função é crescente.

Se $a < 0$: a função é decrescente.



4.2.3- Estudo do Sinal da Função Afim

Seja $f(x) = ax + b$, estudar o sinal de uma função qualquer é determinar os valores de x para os quais y é positivo, os de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo.



Exemplos:

1) Determine o intervalo das seguintes funções para que $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

a) $y = f(x) = x + 1$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Logo, $f(x)$ será maior que 0 quando $x > -1$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Logo, $f(x)$ será igual a 0 quando $x = -1$

$$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

Logo, $f(x)$ será menor que 0 quando $x < -1$

b) $y = f(x) = -x + 1$

$$*-x + 1 > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$$

Logo, $f(x)$ será maior que 0 quando $x < 1$

$$-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

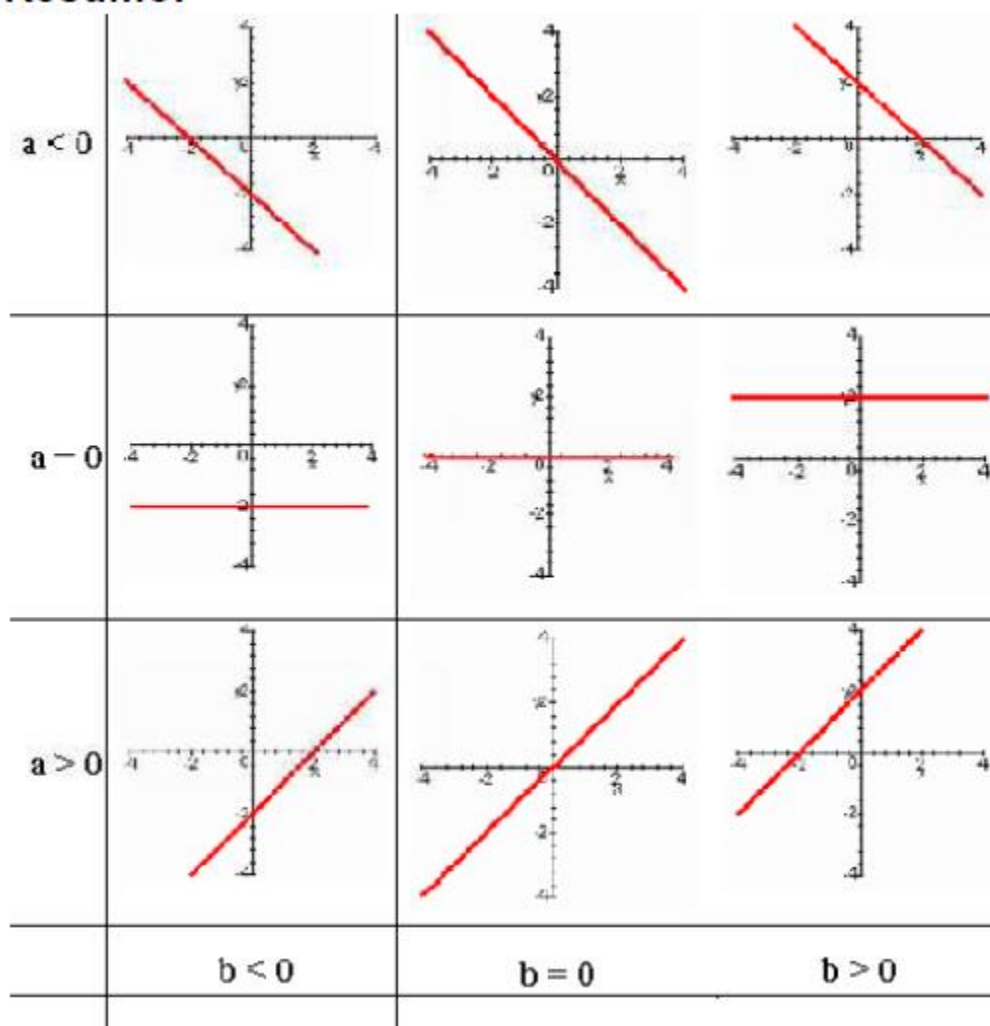
Logo, $f(x)$ será igual a 0 quando $x = 1$

$$*-x + 1 < 0 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow x > 1$$

Logo, $f(x)$ será menor que 0 quando $x > 1$

(*ao multiplicar por -1, inverte-se o sinal da desigualdade)

Resumo:



4.3- Função Polinomial do 2º Grau ou Função Quadrática

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Exemplos:

- 1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, em que $a = 3$, $b = -2$ e $c = 5$.
- 2) $f(x) = x^2 - 3$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -3$.
- 3) $f(x) = x^2 + 6x + 5$, em que $a = 1$, $b = 6$ e $c = 5$.
- 4) $f(x) = -x^2 + 4x$, em que $a = -1$, $b = 4$ e $c = 0$.
- 5) $f(x) = -5x^2$, em que $a = -5$, $b = 0$ e $c = 0$.

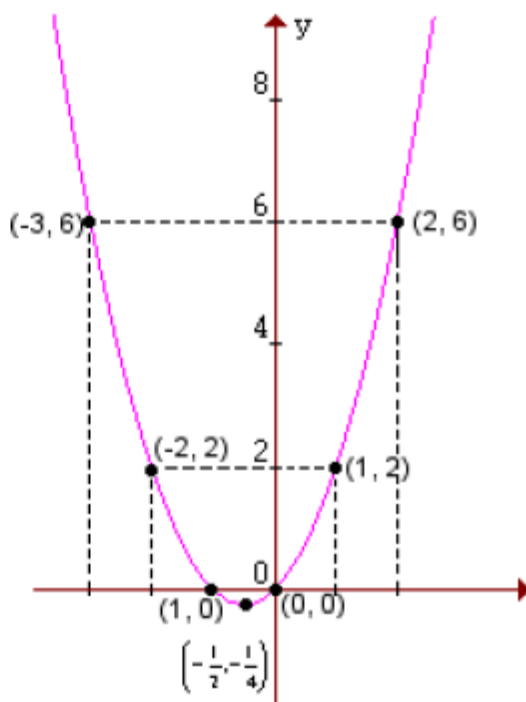
4.3.1- Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva denominada parábola.

Exemplo:

Construir o gráfico da função $y = x^2 + x$.

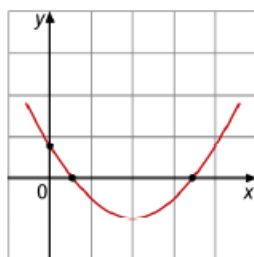
x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



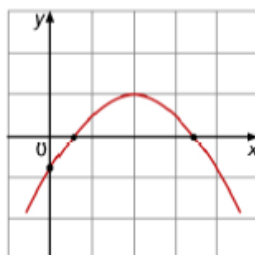
Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática, nota – se que

- Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.



- Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.



4.3.2- Raízes ou Zeros da Função Quadrática

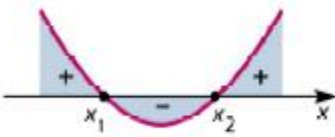
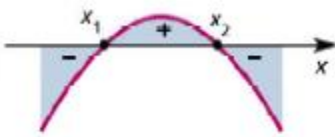
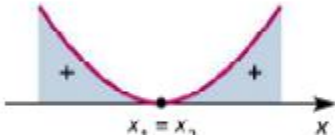
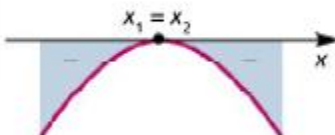
Denominam – se raízes ou zeros da Função Polinomial do 2º Grau $f(x)=ax^2+bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$. Esses zeros podem ser determinados utilizando a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante.

- quando Δ é positivo ($\Delta > 0$), a função tem duas raízes reais e distintas e a parábola corta o eixo x nesses dois pontos;
- quando Δ é zero ($\Delta = 0$), a função tem dois zeros reais e iguais e a parábola corta o eixo x em um único ponto;
- quando Δ é negativo ($\Delta < 0$), a função não tem nenhum zero real e a parábola não corta o eixo x .

4.3.3- Estudo do Sinal da Função Quadrática

$\Delta \backslash a$	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Vértice: $V = \left(-\frac{b}{a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

O vértice da parábola é ponto máximo quando $a < 0$.

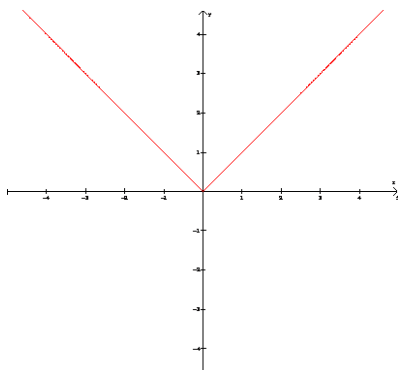
O vértice da parábola é ponto mínimo quando $a > 0$.

4.4- Função Modular

A função modular é uma função que apresenta o módulo na sua lei de formação. De maneira mais formal, podemos definir função modular como: $f(x) = |x|$ ou $y = |x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de origem O que são bissetrizes dos 1º e 2º quadrantes.



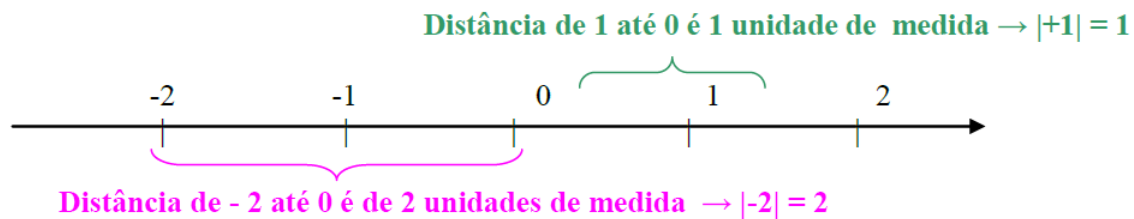
$$\text{Im} = \mathbb{R}_+ \quad \text{D} = \mathbb{R}$$

4.4.1- Módulo ou Valor Absoluto de um número

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x que se indica por $|x|$ é definido da seguinte forma

$$x = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O módulo de um número real é sempre positivo ou nulo, ou seja, o módulo de um número real nunca é negativo. Geometricamente, o módulo de um número real x é igual à distância do ponto que representa na reta real à origem.



Observações:

- Se $|x| < a$, x deve estar entre $-a$ e a , ou seja, $|x| < a \rightarrow -a < x < a$.



- Se $|x| > a$, x deve estar à direita de a ou à esquerda de $-a$, ou seja, $|x| > a \rightarrow x > a$ ou $x < -a$.



Exemplos:

a) $|5| = 5$

b) $|-3| = 3$

4.4.2- Equações Modulares

Denomina-se equação modular toda equação que contém a incógnita em um módulo.

Exemplos:

a) Resolver a equação $|x^2 - 5x| = 6$.

Solução:

Caso 1: $x^2 - 5x = 6$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = -1$$

Caso 2: $x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 2$$

Resposta: $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

b) Resolver a equação $|x - 6| = |3 - 2x|$.

Solução:

Caso 1: $x - 6 = 3 - 2x \rightarrow x + 2x = 3 + 6 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$

Caso 2: $x - 6 = -(3 - 2x) \rightarrow x - 6 = -3 + 2x \rightarrow x - 2x = -3 + 6 \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = -3$

Resposta: $S = \{-3, 3\}$

c) Resolver a equação $|x| = 7 \rightarrow x = 7$ ou $x = -7$.

d) Resolver a equação $|x + 1| = 5$.

Solução:

Caso 1: $x + 1 = 5 \rightarrow x = 5 - 1 \rightarrow x = 4$.

Caso 2: $x + 1 = -5 \rightarrow x = -5 - 1 \rightarrow x = -6$.

Resposta: $S = \{-6, 4\}$

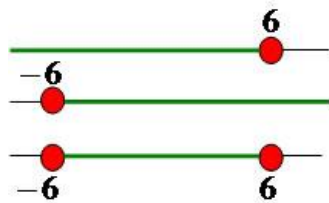
4.4.3- Inequações Modulares

Uma inequação será denominada como modular se dentro do módulo aparecer uma expressão com uma ou mais incógnitas.

Exemplos:

1) $|x| \leq 6$

Utilizando a seguinte definição: se $|x| < a$ então, $-a < x < a$, temos que:
 $-6 \leq x \leq 6$.



$S = \{x \in \mathbb{R} / -6 \leq x \leq 6\}$

2) $|x - 7| < 2$

Utilizando a seguinte definição: se $|x| < a$ então, $-a < x < a$, temos que:

$-2 < x - 7 < 2$

$-2 + 7 < x < 2 + 7$

$5 < x < 9$



$S = \{x \in \mathbb{R} / 5 < x < 9\}$

$$3) |x^2 - 5x| > 6$$

Precisamos verificar as duas condições:

$$|x| > a \text{ então, } x < -a \text{ ou } x > a$$

$$|x| < a \text{ então, } -a < x < a$$

Fazendo $|x| > a$ então, $x < -a$ ou $x > a$

$$x^2 - 5x > 6$$

$$x^2 - 5x - 6 > 0$$

Aplicando Bháskara temos:

$$x' = 6$$

$$x'' = -1$$

Pela propriedade:

$$x > 6$$

$$x < -1$$

Fazendo $|x| < a$ então, $-a < x < a$

$$x^2 - 5x < -6$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Aplicando Bháskara temos:

$$x' = 3$$

$$x'' = 2$$

Pela propriedade:

$$x > 2$$

$$x < 3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}.$$

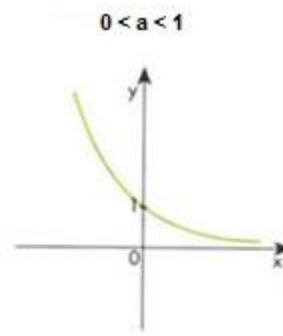
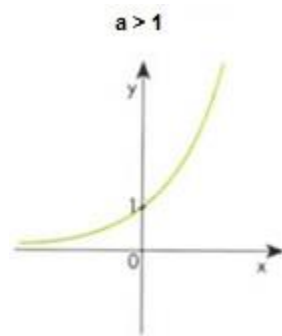
4.5- Função Exponencial

4.5.1- Introdução

Função exponencial é toda função que contém variável no expoente, ou seja, é uma função do tipo $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, em que o número a é denominado **base**.

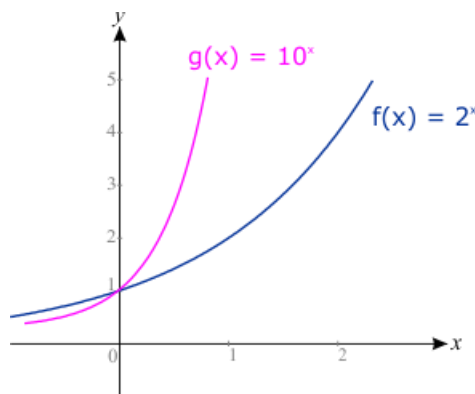
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } y = a^x, \text{ sendo que } a > 1 \text{ ou } 0 < a < 1.$$

Uma função pode ser representada através de um gráfico, e no caso da exponencial, temos duas situações: $a > 1$ e $0 < a < 1$. Observe como os gráficos são constituídos respeitando as condições propostas.



Exemplos:

A figura abaixo mostra os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 10^x$.



- Assim como todas as funções do tipo $f(x) = a^x$, ambas as funções passam pelo ponto $(0,1)$.
- $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
- Funções exponenciais são sempre positivas: $a^x > 0, \forall x$.

Uma função exponencial é utilizada na representação de situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações.

Exemplos:

1-Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $v(t) = v_0 * 2^{-0,2t}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R\$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.

Temos que $v(10) = 12\,000$, então:

$$v(10) = v_0 * 2^{-0,2*10}$$

$$12\,000 = v_0 * 2^{-2}$$

$$12\,000 = v_0 * 1/4$$

$$12\,000 : 1/4 = v_0$$

$$v_0 = 12\,000 * 4$$

$$v_0 = 48\,000$$

A máquina foi comprada pelo valor de R\$ 48 000,00.

2- Suponha que, em 2003, o PIB (Produto Interno Bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares? Use $1,03^{20} = 1,80$.

$$P(x) = P_0 * (1 + i)^t$$

$$P(x) = 500 * (1 + 0,03)^{20}$$

$$P(x) = 500 * 1,03^{20}$$

$$P(x) = 500 * 1,80$$

$$P(x) = 900$$

O PIB do país no ano de 2023 será igual a R\$ 900 bilhões.

4.5.2- Gráfico da Função Exponencial

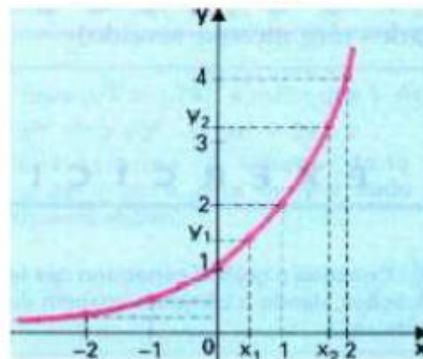
Temos dois casos a considerar:

- quando $a > 1$
- quando $0 < a < 1$

Exemplos:

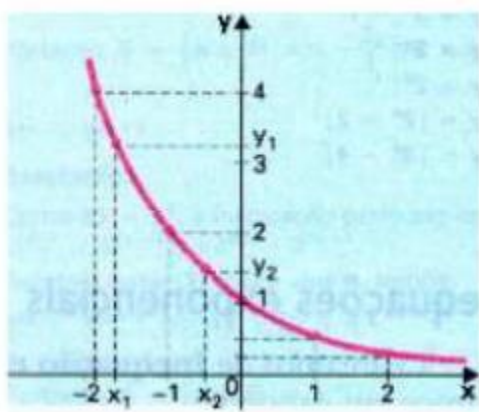
1) $y = 2^x$, com $a > 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4



2) $y = (\frac{1}{2})^x$, com $0 < a < 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4



Propriedades da Potenciação

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.5.3- Equação Exponencial

É toda equação cuja incógnita está no expoente de uma potência.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \rightarrow x_1 = x_2 \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Para resolver equações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) redução dos dois membros da equação a potências de mesma base.

2º) aplicação da propriedade: $a^m = a^n \rightarrow m = n$

Exemplos:

a) $3^x = 81$

Solução:

Como $81=3^4$, podemos escrever $3^x = 3^4$

E daí, $x=4$.

b) $9^x = 1$

Solução:

$$9^x = 1 \rightarrow 9^x = 9^0 \rightarrow \text{Logo } x = 0.$$

$$c) \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}$$

Solução:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^4}{4^4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

Logo $x = 4$.

$$d) 3^x = \sqrt[4]{27}$$

Solução:

$$3^x = \sqrt[4]{27} \Rightarrow 3^x = \sqrt[4]{3^3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{4}}; \text{logo } x = \frac{3}{4}$$

$$e) 2^{3x-1} = 32^{2x}$$

Solução:

$$2^{3x-1} = 32^{2x} \rightarrow 2^{3x-1} = (2^5)^{2x} \rightarrow 2^{3x-1} = 2^{10x}$$

$$\text{Daí: } 3x - 1 = 10, \text{ de onde } x = -\frac{1}{7}$$

$$f) \text{ Resolva a equação } 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Solução:

Vamos resolver esta equação através de uma transformação:

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Fazendo $3^x = y$, obtemos:

$$y^2 - 6y - 27 = 0$$

Aplicamos Bhaskara encontramos $y' = -3$ e $y'' = 9$.

Para achar o x , devemos voltar os valores para a equação auxiliar $3^x = y$, logo:

$$y' = -3 \rightarrow 3^{x'} = -3 \quad \text{não existe } x', \text{ pois potência de base positiva é positiva}$$

$$y'' = 9 \rightarrow 3^{x''} = 9 \rightarrow 3^{x''} = 3^2 \rightarrow x'' = 2$$

Portanto a solução é $x = 2$.

4.5.4- Inequação Exponencial

É toda desigualdade cuja incógnita está no expoente de uma potência. A resolução de uma inequação exponencial poderá ser dada através das propriedades da potenciação.

Antes de resolver uma inequação exponencial, deve-se observar a situação das bases nos dois membros, caso as bases sejam diferentes, reduza-as a uma mesma base e, em seguida, forme uma inequação com os expoentes. Deve – se observar as regras dos sinais:

- Caso $a > 1$, mantenha o sinal original.
- Caso $0 < a < 1$, inverta o sinal.

$$a^{x_1} < a^{x_2} \rightarrow x_1 < x_2 \text{ se } a > 1 \text{ (f(x) é crescente)}$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \rightarrow x_1 > x_2 \text{ se } 0 < a < 1 \text{ (f(x) é decrescente)}$$

Exemplos:

a) $2^x \geq 128$

Por fatoração, $128 = 2^7$. Portanto: $2^x \geq 2^7 \rightarrow$ como as bases são iguais e $a > 1$, basta formar uma inequação com os expoentes. $x \geq 7$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Nesse exemplo as bases já são iguais. Porém, é necessário observar que $0 < a < 1$. Diante dessa condição, inverte-se o sinal. Fala – se

$$x > 2.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

c) $4^x + 4 > 5 \cdot 2^x$

Perceba que, por fatoração, $4^x = 2^{2x}$ e 2^{2x} é o mesmo que $(2^x)^2$. Reescrevendo a inequação, temos:

$$(2^x)^2 + 4 > 5 \cdot 2^x$$

Chamando 2^x de t, para facilitar a resolução, ficamos com:

$$t^2 + 4 > 5t$$

$$t^2 - 5t + 4 > 0$$

Aqui temos uma inequação de 2º grau, em que deve ser feito o estudo dos sinais. Ao resolver, você encontrará $\Delta = 9$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$. Como $a > 0$, a concavidade da parábola ficará para cima. Isso significa que, como estamos procurando valores que tornem a inequação positiva, ficamos com:

$$t < 1 \text{ ou } t > 4.$$

Retornando à variável inicial:

$$t = 2^x$$

$2^x < 1 \rightarrow 2^x < 2^0 \rightarrow x < 0$ lembre-se que todo número elevado a 1 é igual ao próprio número, e que todo número elevado a zero é igual a 1.

$$2^x > 4 \rightarrow 2^x > 2^2 \rightarrow x > 2.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$$

4.5.5- Resolução de Problemas envolvendo Função Exponencial

1) Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, para daqui a x anos, por $f(x) = 20 - \frac{1}{2^x} * 1000$. Determine a população referente ao terceiro ano.

Solução:

$$f(x) = \left(20 - \frac{1}{2^3}\right) * 1000$$

$$f(x) = \left(20 - \frac{1}{8}\right) * 1000$$

$$f(x) = \left(\frac{160-1}{8}\right) * 1000$$

$$f(x) = \frac{159}{8} * 1000$$

$$f(x) = \frac{159.000.000}{8}$$

$$f(x) = 19.875$$

A população referente ao 3º ano é de 19.875 habitantes.

2) Numa certa cidade, o número de habitantes, num raio de r km a partir do seu centro é dado por $P(r) = k * 2^{3r}$, em que k é constante e $r > 0$. Se há 98 304 habitantes num raio de 5 km do centro, quantos habitantes há num raio de 3 km do centro?

Solução: $P(r) = k * 2^{3r}$

$$98\,304 = k * 2^{3*5}$$

$$98\,304 = k * 2^{15}$$

$$98\,304 = k * 32\,768$$

$$k = 98\,304 / 32\,768$$

$$k = 3$$

Calculando o número de habitantes num raio de 3 km

$$P(r) = k * 2^{3r}$$

$$P(3) = 3 * 2^{3*3}$$

$$P(3) = 3 * 2^9$$

$$P(3) = 3 * 512$$

$$P(3) = 1536$$

O número de habitantes num raio de 3 km é igual a 1536.

3) Suponha que, em 2003, o PIB (produto interno bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares? use $1,03^{20} = 1,80$.

$$P(X) = P_0 * (1 + I)^T$$

$$P(X) = 500 * (1 + 0,03)^{20}$$

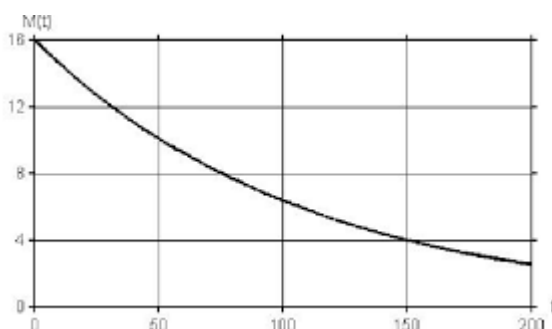
$$P(X) = 500 * 1,03^{20}$$

$$P(X) = 500 * 1,80$$

$$P(X) = 900$$

O PIB do país no ano de 2023 será igual a R\$ 900 bilhões.

4) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva abaixo representa a função exponencial $M(t)$, que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que



a) $M(t) = 2^{4-t/75}$

b) $M(t) = 2^{4-t/50}$

c) $M(t) = 2^{5-t/50}$

d) $M(t) = 2^{5-t/150}$

Solução:

- Para o ponto (0,16), temos:

$$M(0) = 16 = 2^4$$

- Para o ponto (150,4), temos:

$$M(150) = 4 = 2^2 = M(0) \cdot 2^k = 2^4 \cdot 2^k = 2^{4+k} = 2^{4-2} = 2^{4-150/75}$$

$$M(t) = 2^{4-t/75}$$

5) Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $v(t) = v_0 * 2^{-0,2t}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R\$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.

Solução:

Temos que $v(10) = 12\ 000$, então:

$$v(10) = v_0 * 2^{-0,2*10}$$

$$12\ 000 = v_0 * 2^{-2}$$

$$12\ 000 = v_0 * 1/4$$

$$12\ 000 : 1/4 = v_0$$

$$v_0 = 12\ 000 * 4$$

$$v_0 = 48\ 000$$

A máquina foi comprada pelo valor de R\$ 48 000,00.

6) A população de bactérias de uma cultura é dada pela expressão:

$$N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$$

a) Após 5 horas qual será a população de bactérias dessa cultura?

$$N(5) = 1200 \cdot 2^{0,4 \cdot 5}$$

$$N(5) = 1200 \cdot 2^2$$

$$N(5) = 1200 \cdot 4$$

$$N(5) = 4800 \text{ bactérias}$$

b) Em quanto tempo a população será igual a 76800 bactérias?

$$76800 = 1200 \cdot 2^{0,4t}$$

$$76800/1200 = 2^{0,4t}$$

$$64 = 2^{0,4t}$$

$$2^6 = 2^{0,4t} \text{ (cancelamos as bases e resolvemos a equação que está no expoente)}$$

$$6 = 0,4t$$

$$t = 6/0,4$$

$$t = 15 \text{ horas}$$

7) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = a * 3^{bx}$, em que a e b são constantes reais. Dado que $f(0) = 900$ e $f(10) = 300$, calcule k tal que $f(k) = 100$.

Solução:

$$f(0) = 900$$

$$f(x) = a \cdot 3^{bx}$$

$$f(0) = a \cdot 3^{b \cdot 0}$$

$$900 = a \cdot 1$$

$$900 = a$$

$$a = 900$$

$$f(10) = 300$$

$$f(x) = a \cdot 3^{bx}$$

$$f(10) = a \cdot 3^{10b}$$

$$300 = 900 \cdot 3^{10b}$$

$$300/900 = 3^{10b}$$

$$1/3 = 3^{10b}$$

$$3^{-1} = 3^{10b}$$

$$10b = -1$$

$$b = -1/10$$

$$b = -0,1$$

$$f(k) = 100$$

$$f(x) = a \cdot 3^{bx}$$

$$f(k) = 900 \cdot 3^{-0,1k}$$

$$100 = 900 \cdot 3^{-0,1k}$$

$$100/900 = 3^{-0,1k}$$

$$1/9 = 3^{-0,1k}$$

$$9^{-1} = 3^{-0,1k}$$

$$3^{-2} = 3^{-0,1k}$$

$$-0,1k = -2$$

$$0,1k = 2$$

$$k = 20$$

O valor de k na função exponencial de acordo com as condições fornecidas é 20.

8) Em determinadas condições, o número de bactérias de uma cultura cresce em função do tempo, obedecendo à seguinte função $B(t) = 3^{\frac{t}{6}}$. Considerando t medido em horas, determine a quantidade de bactérias nessa colônia após 2 dias.

Solução:

2 dias = 48 horas

$$B(t) = 3^{\frac{t}{6}}$$

$$B(48) = 3^{\frac{48}{6}}$$

$$B(48) = 3^8$$

$$B(48) = 6561$$

Após dois dias a colônia terá 6561 bactérias

9) Após o início de um experimento o número de bactérias de uma cultura é dado pela expressão: $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$

Quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 19200 bactérias?

$$N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$$

$$N(t) = 19200$$

$$1200 \cdot 2^{0,4t} = 19200$$

$$2^{0,4t} = 19200/1200$$

$$2^{0,4t} = 16$$

$$2^{0,4t} = 2^4$$

$$0,4t = 4$$

$$t = 4/0,4$$

$$t = 10 \text{ h}$$

A cultura terá 19200 bactérias após 10 h.

10) Sob certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, em função do tempo t, medido em horas, é dado por $B(t) = 2^{t/12}$. Qual será o número de bactérias 6 dias após a hora zero?

6 dias = 6 * 24 = 144 horas

$$B(t) = 2^{t/12}$$

$$B(144) = 2^{144/12}$$

$$B(144) = 2^{12}$$

$$B(144) = 4096 \text{ bactérias}$$

A cultura terá 4096 bactérias.

4.6- Função Logarítmica

4.6.1- Introdução

Toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$ é denominada função logarítmica de base **a**. Nesse tipo de função o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.

Exemplos de funções logarítmicas:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_3 x$$

$$f(x) = \log_{1/2} x$$

$$f(x) = \log_4 x$$

$$f(x) = \log_2(x - 1)$$

$$f(x) = \log_{0,5} x$$

Notação:

$$\begin{array}{c} \text{logaritmando} \\ \downarrow \\ \log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{base} & \text{logaritmo} \end{array} \end{array}$$

ln: logaritmo neperiano, $\ln b = \log_e b$, $e \approx 2,71$

$\log_{10} b$: logaritmo decimal, $\log_{10} b = \log b$

Definição: $\log_a b = c \rightarrow a^c = b$, para $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$ (Condição de existência de um logaritmo).

Consequências da definição:

$$\begin{aligned}\log_a 1 &= 0 \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a a^n &= n \\ \log_a b &= \log_a c \Leftrightarrow b = c\end{aligned}$$

Domínio da Função Logarítmica

Dada a função $f(x) = \log_{(x-2)}(4-x)$, temos as seguintes restrições:

- 1) $4 - x > 0 \rightarrow -x > -4 \rightarrow x < 4$
- 2) $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$
- 3) $x - 2 \neq 1 \rightarrow x \neq 1+2 \rightarrow x \neq 3$

Realizando a intersecção das restrições 1, 2 e 3, temos o seguinte resultado:
 $2 < x < 3$ e $3 < x < 4$.

Dessa forma, **$D = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3 \text{ e } 3 < x < 4\}$**

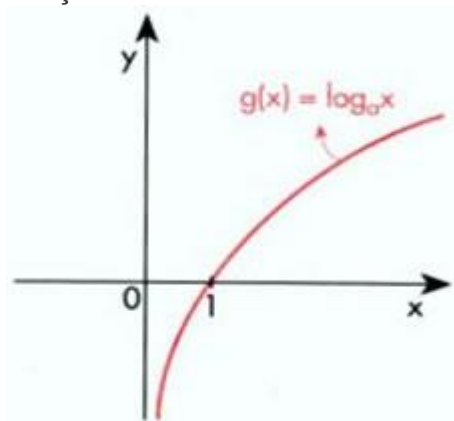
4.6.2- Gráfico de uma função logarítmica

Para a construção do gráfico da função logarítmica deve – se estar atento a duas situações:

- $a > 1$
- $0 < a < 1$

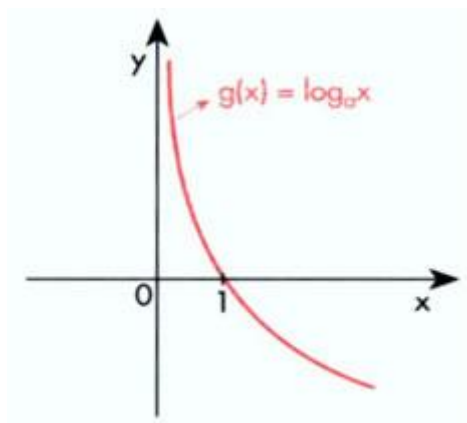
Para $a > 1$, temos o gráfico da seguinte forma:

Função crescente



Para $0 < a < 1$, temos o gráfico da seguinte forma:

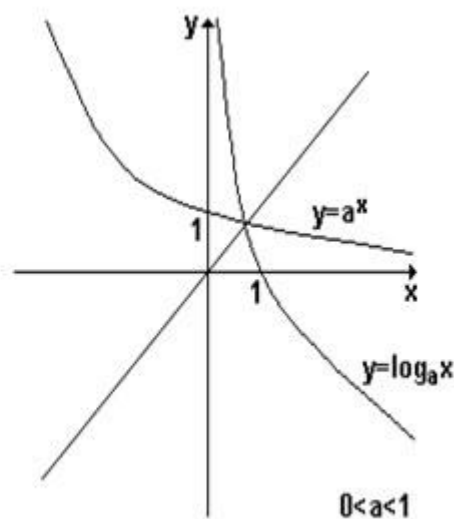
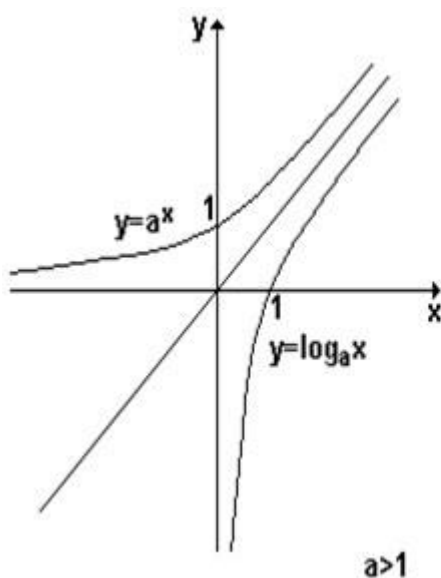
Função decrescente



4.6.2.1- Características do gráfico da função logarítmica $y = \log_a x$

- ✓ O gráfico está totalmente à direita do eixo y, pois ela é definida para $x > 0$.
- ✓ Intersecta o eixo das abscissas no ponto $(1,0)$, então a raiz da função é $x = 1$.
- ✓ Note que y assume todos as soluções reais, por isso dizemos que a $\text{Im}(\text{imagem}) = \mathbb{R}$.

Através dos estudos das funções logarítmicas, chegamos à conclusão de que ela é uma função inversa da exponencial. Observe o gráfico comparativo a seguir:



Podemos notar que (x,y) está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso (y,x) está na função exponencial de mesma base.

4.6.3- Propriedades Operatórias dos Logaritmos

Os logaritmos possuem inúmeras aplicações no cotidiano. A Física e a Química utilizam as funções logarítmicas nos fenômenos em que os números adquirem valores muito grandes, facilitando os cálculos e a construção de gráficos.

i) Logaritmo de um produto

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Exemplo:

$$\log_2(32 \cdot 16) = \log_2 32 + \log_2 16 = 5 + 4 = 9$$

ii) Logaritmo de um quociente

$$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$$

Exemplo:

$$\log_5(625/125) = \log_5 625 - \log_5 125 = 4 - 3 = 1$$

iii) Logaritmo de uma potência

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

Exemplo:

$$\log_3 81^2 = 2 \cdot \log_3 81 = 2 \cdot 4 = 8$$

iv) Logaritmo de uma raiz

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} \rightarrow \frac{m}{n} \cdot \log_a x$$

Exemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{16^2} = \log_2 16^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_2 16 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

v) Mudança de Base

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Exemplo:

$$\log_5 8 = \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{0,90309}{0,69898} = 1,292$$

4.6.4- Equações Logarítmicas

Uma equação logarítmica apresenta a incógnita na base do logaritmo ou no logaritmando ou em ambos.

Lembrete: $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$, com “a” $\rightarrow$ base do logaritmo, b $\rightarrow$ logaritmando e x $\rightarrow$ o logaritmo.

Exemplos:

a) $\log_3(x + 5) = 2$

Solução:

Condição de existência: $x+5 > 0 \rightarrow x > -5$

$$\log_3(x+5) = 2 \rightarrow x+5 = 3^2 \rightarrow x=9-5 \rightarrow x=4$$

Como $x=4$ satisfaz a condição de existência, então o conjunto solução é $S=\{4\}$.

b) $\log_2(\log_4 x) = 1$

Solução:

Condição de existência: $x > 0$ $\log_4 x > 0$

$$\log_2(\log_4 x) = 1; \text{ sabemos que } 1 = \log_2(2), \text{ então } \log_2(\log_4 x) = \log_2(2) \rightarrow \log_4 x = 2 \rightarrow 4^2 = x \rightarrow x=16$$

Como $x=16$ satisfaz as condições de existência, então o conjunto solução é $S=\{16\}$.

c) $\log_2(x + 1) = 2$

Condição de existência: $x + 1 > 0$
 $x > -1$

$$\begin{aligned}\log_2(x + 1) &= 2 \\ 2^2 &= x + 1 \\ x &= 4 - 1 \\ x &= 3\end{aligned}$$

d) $\log_5 2x + 4 = \log_5 3x + 1.$

Solução: temos que

$$2x + 4 = 3x + 1$$

$$2x - 3x = 1 - 4$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Portanto, $S = \{ 3 \}$

e) $\log_3 5x + 2 = 3.$

Solução:

$$5x + 2 = 3^3$$

$$5x + 2 = 27$$

$$5x = 27 - 2$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

Portanto $S = \{5\}.$

f)

$$(\log_4 x)^2 - 3 \cdot \log_4 x = 4$$

Solução: Vamos fazer a seguinte mudança de incógnita

$$\log_4 x = y.$$

Substituindo na equação inicial, ficaremos com:

$$y^2 - 3y = 4$$

ou

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$y = 4 \text{ ou } y = -1$$

Como $\log_4 x = y$, então:

$$\log_4 x = 4 \rightarrow x = 4^4 \rightarrow x = 256$$

Ou

$$\log_4 x = -1 \rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

Portanto, $S = \{\frac{1}{4}, 256\}$

g) $\log(2x + 3) + \log(x + 2) = 2 \log x$

Solução: usando as propriedades do logaritmo, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\log[(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

Note que para isso utilizamos as seguintes propriedades:

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$

$$\log x^n = n \cdot \log x$$

Vamos retornar à equação:

$$\log[(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

Como ficamos com uma igualdade entre dois logaritmos, segue que:

$$(2x + 3)(x + 2) = x^2$$

ou

$$2x^2 + 4x + 3x + 6 = x^2$$

$$2x^2 - x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

$$x = -1 \text{ ou } x = -6$$

Lembre-se que para o logaritmo existir o logaritmando e a base devem ser positivos. Com os valores encontrados para x, o logaritmando ficará negativo. Sendo assim, a equação não tem solução ou $S = \emptyset$.

4.6.5- Inequações Logarítmicas

É toda inequação cuja incógnita está no logaritmando, na base do logaritmo ou em ambos.

Exemplos:

a) $\log_2(x - 1) < \log_2 3$

Condição de existência:

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad (S_1)$$

$$\log_2(x-1) < \log_2 3 \rightarrow \text{como } a > 1 \text{ mantém-se a direção inicial do sinal.}$$

$$x - 1 < 3$$

$$x < 4 \quad (S_2)$$

$S = S_1 \cap S_2 \rightarrow$ a solução final é a interseção das soluções 1 e 2.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$$

b)

$$\log_3(2x+1) \leq 1$$

Condição de existência:

$$2x + 1 > 0 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \quad (S_1)$$

Veja que no 2º membro da desigualdade não temos um logaritmo. Porém, podemos escrever o número 1 em forma de logaritmo, dessa forma igualando as bases: $1 = \log_3 3^1$. A base 3 foi escrita intencionalmente, para se igualar a base do logaritmo escrito no 1º membro. Reescrevendo a inequação:

$$\log_3(2x+1) \leq \log_3 3^1 \rightarrow \text{como } a > 1 \text{ mantém-se a direção inicial do sinal.}$$

$$2x + 1 \leq 3^1 \rightarrow 2x \leq 3 - 1$$

$$2x \leq 2 \rightarrow x \leq 1.$$

$S = S_1 \cap S_2 \rightarrow$ a solução final é a interseção das soluções 1 e 2.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 1\}$$

c)

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$$

Condições de existência:

$$x - 7 > 0 \rightarrow x > 7 \quad (S_1)$$

$$3x + 1 > 0 \rightarrow 3x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{3} \quad (S_2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \rightarrow \text{como } 0 < a < 1 \text{ inverte-se a direção inicial do sinal.}$$

$$x - 7 < 3x + 1 \rightarrow x - 3x < 1 + 7$$

$$-2x < 8 \rightarrow 2x > -8 \rightarrow \mathbf{x > -4 \quad (S_3)}$$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \rightarrow$ a solução final é a interseção das soluções 1, 2 e 3.

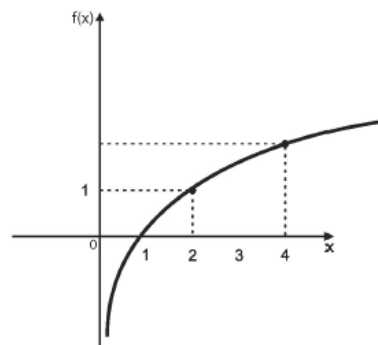
$$\mathbf{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}}$$

Exercícios:

1- Dados $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0.477$, qual é o valor de $\log 12$?

- A) 0,043
- B) 0,287
- C) 0,567
- D) 1,079
- E) 2,778

2- Observe o gráfico abaixo que representa uma função logarítmica de base 2.



Qual é o valor de $f(x)$ para x igual a 4?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

3- Qual é, aproximadamente, o valor de $\log 14$?

- A) 2,10
- B) 1,70
- C) 1,60
- D) 1,15
- E) 0,25

Dados: $\log 2 = 0,30$ e $\log 7 = 0,85$

4- Qual é o valor aproximado de $\log_5 11$?

- A) 0,34
- B) 0,67
- C) 0,73
- D) 1,48
- E) 1,74

Considere: $\log 5 = 0,70$ e $\log 11 = 1,04$

5- A expressão $\log_2 6 + 2 \log_2 5$, equivale a

- A) $\log_2 16$ B) $\log_2 22$ C) $\log_2 75$ D) $\log_2 150$ E) $\log_2 900$

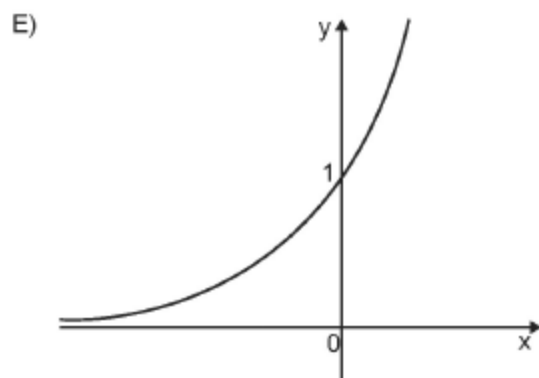
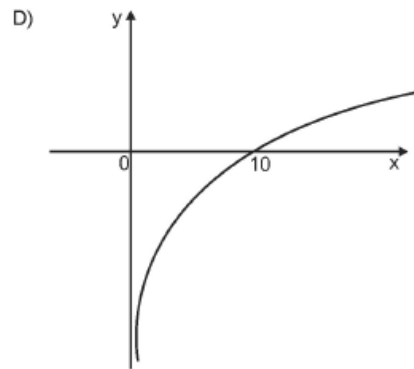
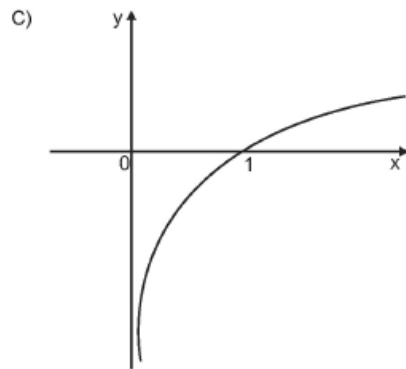
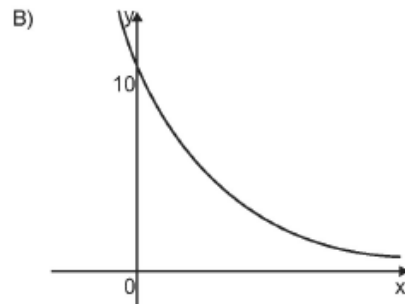
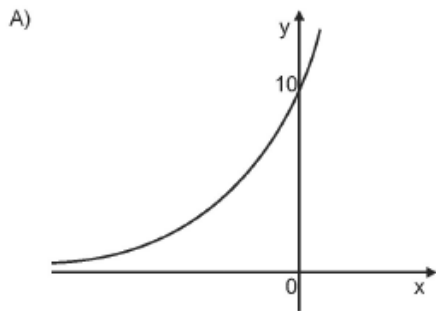
6- Qual é o valor de $\log_3 9\sqrt{27}$?

- A) 9 B) 5 C) 7 D) $7/2$ E) $1/2$

7- Qual é o valor da expressão $\log_2 16 - \log_2 4 + \log_2 2$?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 10 E) 11

8- Qual é o gráfico que melhor representa a função inversa da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, definida por $f(x) = 10^x$?



9- Qual é o valor do pH de uma solução de ácido sulfúrico (H_2SO_4) com concentração hidrogeniônica de $5 \cdot 10^{-3}$? Dados : $\log 2 = 0,30$. $\text{pH} = -\log(\text{H}^+)$

10- Um terremoto foi registrado em um sismógrafo com frequência de 2 Hz e amplitude de 3000 microns. Qual foi a magnitude desse terremoto? Classifique – o.

Dados: $M = \log (A \cdot f) + 3,30$; $\log 2 = 0,30$; $\log 3 = 0,48$

MAGNITUDE	CLASSIFICAÇÃO
Menor que 2,0	Microterremotos – não são percebidos
Em torno de 4,5	Terremotos fracos – percebe – se o tremor
Em torno de 5,3	Terremotos moderados
Acima de 6, 0	Terremotos fortes – grande destruição

Gabarito

1-D 2- B 3-D 4-D 5-D 6-D 7-C 8-C 9- 2,3 10-7,08 Forte.

Unidade 5- Trigonometria

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos, assim através do estudo da Trigonometria podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos).

Com o uso de triângulos semelhantes podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distância entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, etc. A Trigonometria é um instrumento potente de cálculo, que além de seu uso na Matemática, também é usado no estudo de fenômenos físicos, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia entre outros

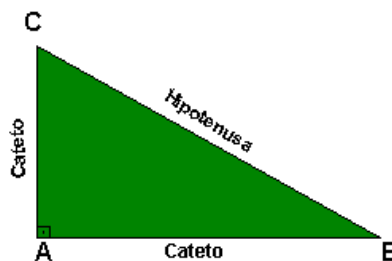
A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no *Papiro Rhind* também uma notável tábua de secantes na tábua cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.

O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria" pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu.

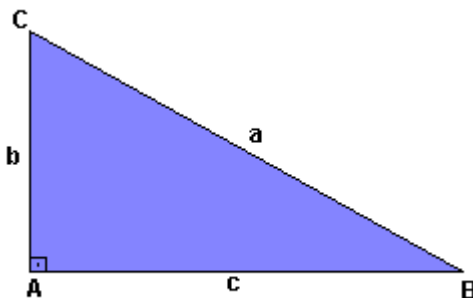
5.1- Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Em um triângulo retângulo chamamos o lado oposto ao ângulo reto de **hipotenusa** e os lados adjacentes de **catetos**.

Observe a figura:



Considere um triângulo retângulo BAC :



Hipotenusa: $\overline{BC}$, $m(\overline{BC}) = a$.

Catetos: $\overline{AC}$, $m(\overline{AC}) = b$.

$\overline{AB}$, $m(\overline{AB}) = c$.

Ângulos: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

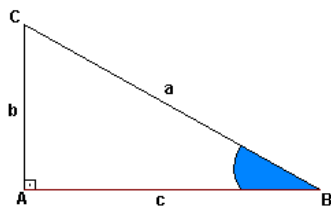
Tomando por base os elementos desse triângulo, podemos definir as seguintes razões trigonométricas:

- **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

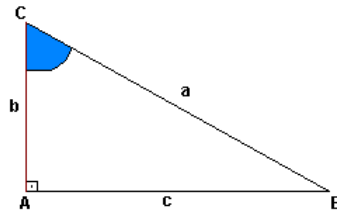
$$\text{Seno} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Assim:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$$



$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$$

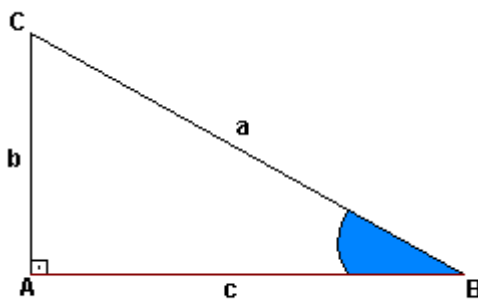


- **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

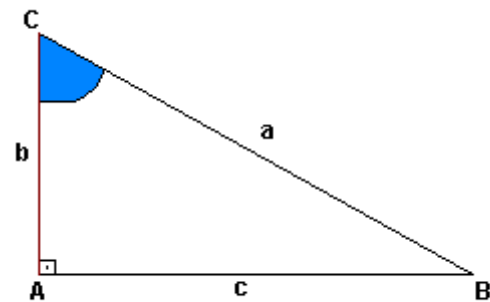
$$\text{Cosseno} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Assim:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$



$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$



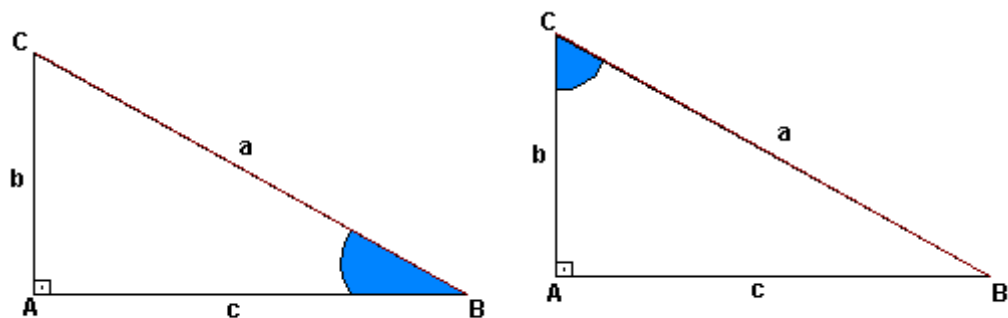
- **Tangente** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

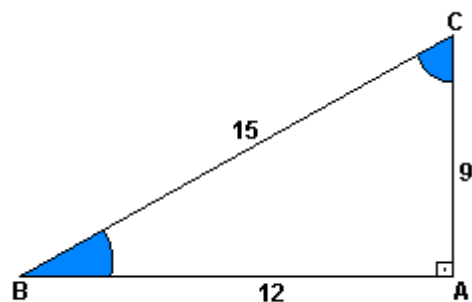
Assim:

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$$



Exemplo:



$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Observações:

1. A tangente de um ângulo agudo pode ser definida como a razão entre seno deste ângulo e o seu cosseno.

Assim:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos \hat{B}$$

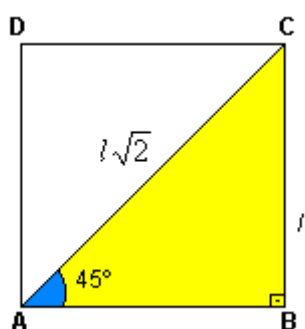
$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{\cancel{a} \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{\cancel{a} \cdot \cos \hat{B}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\cos \hat{B}} \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\cos \hat{B}}$$

2. A tangente de um ângulo agudo é um número real positivo.

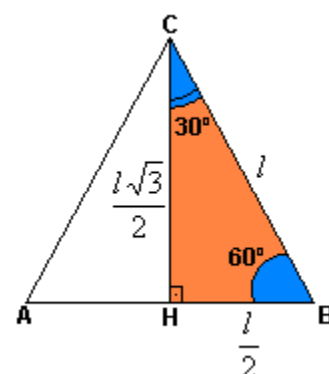
3. O seno e o cosseno de um ângulo agudo são sempre números reais positivos menores que 1, pois qualquer cateto é sempre menor que a hipotenusa.

As razões trigonométricas de 30°, 45° e 60°

Considere as figuras:



quadrado de lado l e diagonal $l\sqrt{2}$

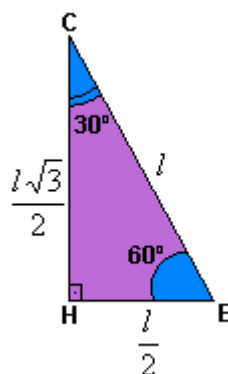


Triângulo equilátero de lado l e altura $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Seno, cosseno e tangente de 30°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, temos:

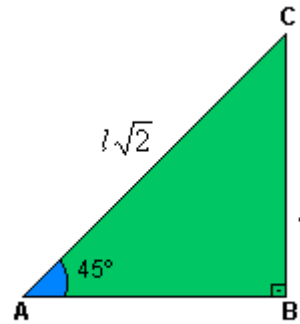
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



Seno, cosseno e tangente de 45°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 45°, temos:

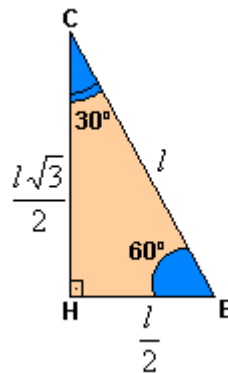
$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l} 1}{\cancel{l} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l} 1}{\cancel{l} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1\end{aligned}$$



Seno, cosseno e tangente de 60°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 60°, temos:

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}/2}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{l}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}/2}{l/2} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{l}} \cdot \frac{2}{2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$



Resumindo

x	sen x	cos x	tg x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

5.2-Unidades de Medidas de Arcos

Grau: É a unidade usada quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes. Cada parte é um arco de um grau (1°).

Radiano: Um arco de um radiano (1 rad) é aquele cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

De acordo com as relações entre as medidas em grau e radiano de arcos, vamos destacar uma regra de três capaz de converter as medidas dos arcos. Veja:

$$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ radianos (aproximadamente 6,28)}$$

$$180^\circ \rightarrow \pi \text{ radiano (aproximadamente 3,14)}$$

$$90^\circ \rightarrow \pi/2 \text{ radiano (aproximadamente 1,57)}$$

$$45^\circ \rightarrow \pi/4 \text{ radiano (aproximadamente 0,785)}$$

medida em graus	medida em radianos
x	α
180	π

Exemplos:

a) 270° em radianos

$$\frac{270^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$180\alpha = 270\pi$$

$$\alpha = \frac{270\pi}{180}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}$$

b) $5\pi/12$ em graus

$$\frac{x}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi}$$

$$\pi * x = \frac{180 * 5\pi}{12}$$

$$x = \frac{900\pi}{12\pi}$$

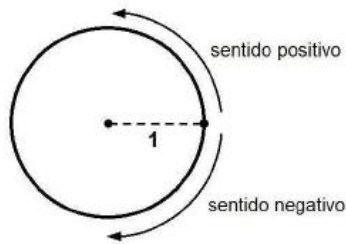
$$\alpha = 75^\circ$$

$$\text{Ou } 5 \cdot 180^\circ / 12 = 900^\circ / 12 = 75^\circ$$

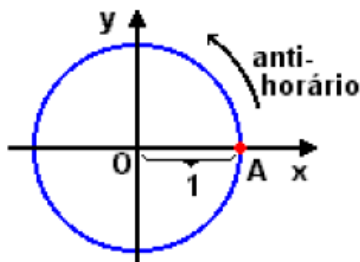
5.3- Ciclo Trigonométrico

Considere uma circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal e o ponto $A=(1,0)$. O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado

será o anti-horário. A região contendo esta circunferência e todos os seus pontos interiores, é denominada círculo ou (ciclo) trigonométrico.



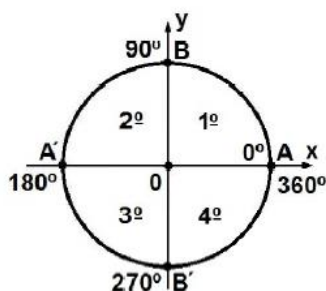
Inserindo os eixos x e y nesse círculo:



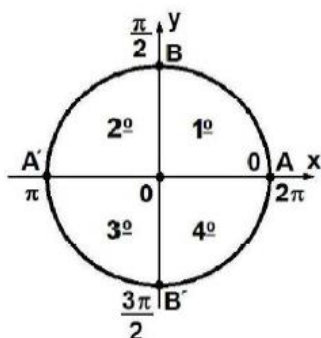
Os eixos OX e OY decompõem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes que são enumerados como segue:

2o. quadrante: Abscissa: negativa Ordenada: positiva $90^\circ < \text{ângulo} < 180^\circ$		1o. quadrante: Abscissa: positiva Ordenada: positiva $0^\circ < \text{ângulo} < 90^\circ$
3o. quadrante: Abscissa: negativa Ordenada: negativa $180^\circ < \text{ângulo} < 270^\circ$		4o. quadrante: Abscissa: positiva Ordenada: negativa $270^\circ < \text{ângulo} < 360^\circ$

Os quadrantes são usados para localizar pontos e a caracterização de ângulos trigonométricos.



Por convenção, os pontos situados sobre os eixos não pertencem a qualquer um dos quadrantes.



Para todo ponto (x,y) pertencente à circunferência unitária, temos:

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1.$$

Nos estudos trigonométricos existem arcos que possuem medidas maiores que 360° , isto é, eles possuem mais de uma volta. Sabemos que uma volta completa equivale a 360° ou 2π , com base nessa informação podemos reduzi-lo à primeira volta realizando o seguinte cálculo: dividir a medida do arco em graus por 360° (volta completa), o resto da divisão será a menor determinação positiva do arco.

Exemplos:

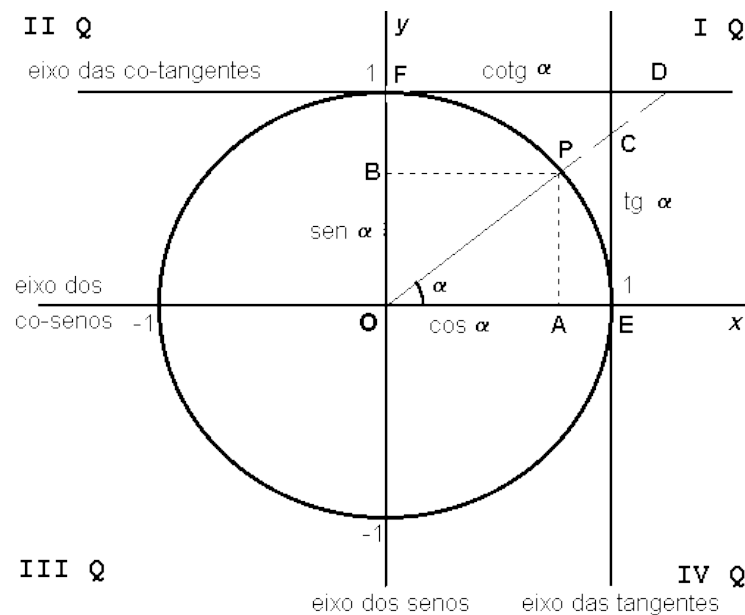
a) Encontrar a primeira determinação positiva do arco de 4380° .

$4380^\circ : 360^\circ$ é correspondente a $12170^\circ + 60^\circ$, portanto, o resto da divisão é igual a 60° que é a determinação principal do arco, dessa forma, sua extremidade pertence ao 1° quadrante.

b) Qual é a determinação principal do arco com medida igual a 1190° ?

$1190^\circ : 360^\circ$, a divisão possui resultado igual a 3 e resto 110, concluímos que o arco possui três voltas completas e extremidade no ângulo de 110° , pertencendo ao 2° quadrante.

5.4- Linhas Trigonométricas



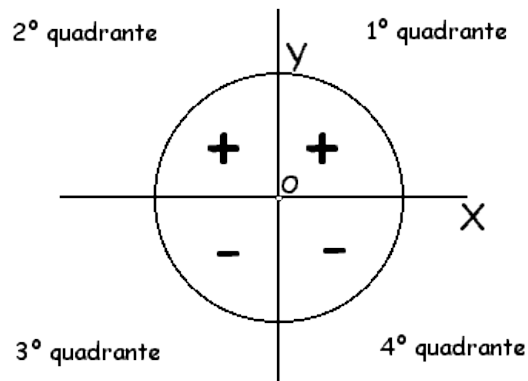
Observações:

- **P** é o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o arco que limita o círculo trigonométrico.
- O seno de a é a ordenada do ponto P .
- O cosseno de a é a abcissa do ponto P .
- **C** é o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o eixo das tangentes.
- A tangente de a é a ordenada do ponto C .
- **D** é o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o eixo das cotangentes.
- A cotangente de a é a abcissa do ponto C .

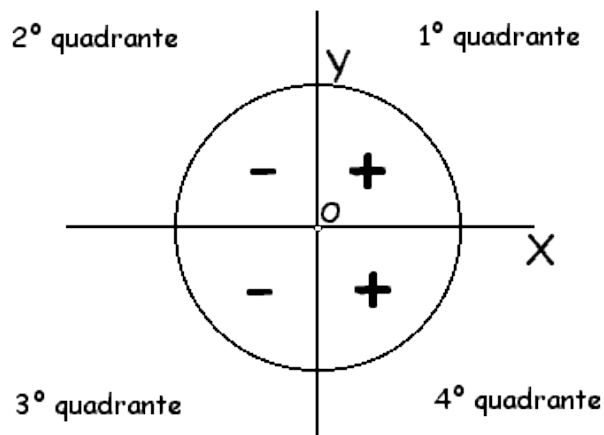
Seno e Cosseno

O sinal de uma razão trigonométrica depende exclusivamente do sinal das coordenadas do ponto associado ao círculo trigonométrico.

Para todo o a , $-1 \leq \sin a \leq 1$

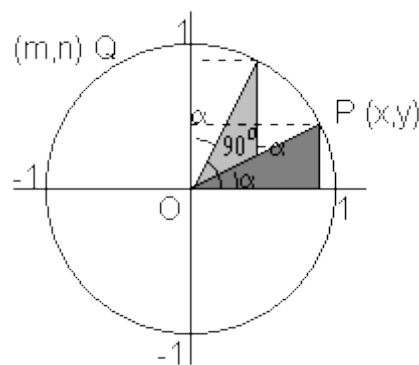


Para todo o α , $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$



Redução ao 1º quadrante

Ângulos do 1ª Quadrante - Ângulos Complementares: α e $90^\circ - \alpha$



Os pontos P e Q do círculo trigonométrico, respectivamente associados a α e a $90^\circ - \alpha$, são simétricos em relação à reta de equação $y = x$. Daí resulta que a abscissa de um é a ordenada do outro e reciprocamente, isto é,

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

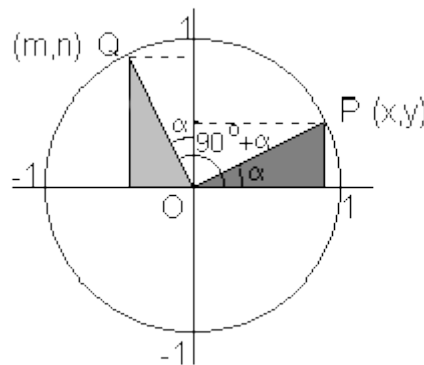
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

Ângulos do 2º Quadrante

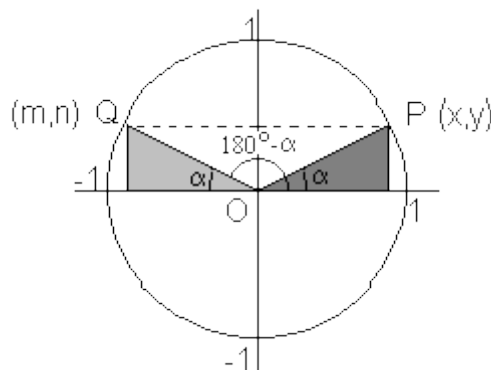
- Ângulos que diferem de 90° : α e $90^\circ + \alpha$



A abscissa de Q é simétrica da ordenada de P, e a ordenada de Q é igual à abscissa de P, isto é,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

- Ângulos Suplementares: α e $180^\circ - \alpha$

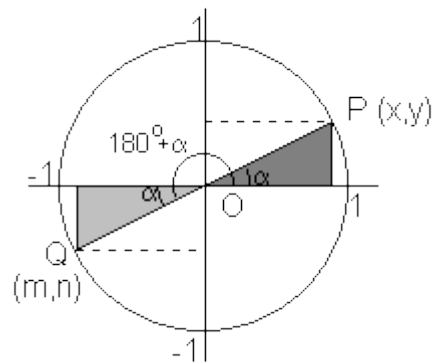


Os pontos P e Q do círculo trigonométrico, respectivamente associados a α e $180^\circ - \alpha$, são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Daí resulta que as ordenadas de P e Q são iguais e as suas abscissas são simétricas, isto é,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{cotg} \alpha\end{aligned}$$

Ângulos do 3º Quadrante

- Ângulos que diferem de 180° : α e $180^\circ + \alpha$



Os pontos P e Q do círculo trigonométrico, respectivamente associados a α e $180^\circ + \alpha$ são simétricos em relação a O. Daí resulta que as suas ordenadas e as suas abcissas são simétricas, isto é,

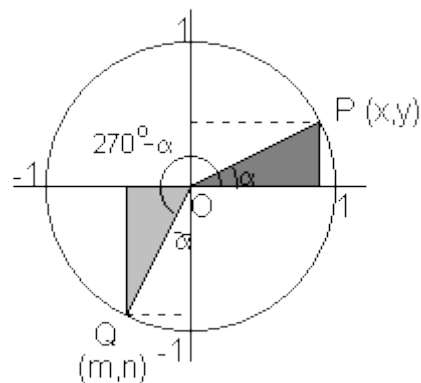
$$\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$$

$$\text{cotg}(180^\circ + \alpha) = \text{cotg } \alpha$$

- Ângulos que somados valem 270° : α e $270^\circ - \alpha$



$$\text{sen}(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

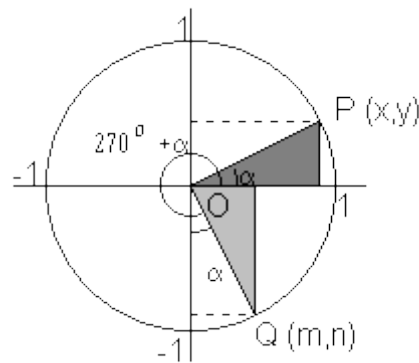
$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{tg}(270^\circ - \alpha) = \text{cotg } \alpha$$

$$\text{cotg}(270^\circ - \alpha) = \text{tg } \alpha$$

Ângulos do 4º Quadrante

- Ângulos que diferem de 270° : α e $270^\circ + \alpha$



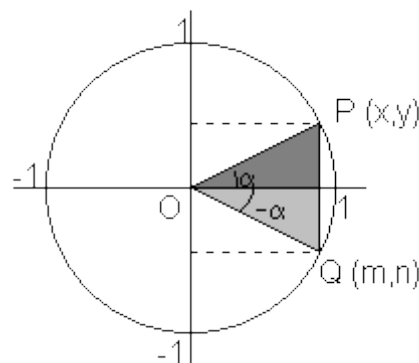
$$\operatorname{sen}(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

- Ângulos simétricos: α e $-\alpha$



Os pontos P e Q do círculo trigonométrico, respectivamente associados α e $-\alpha$, são simétricos em relação ao eixo das abscissas. Daí resulta que as abscissas de P e Q são iguais e as suas ordenadas são simétricas, isto é,

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

Valores de algumas razões trigonométricas:

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotg	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5.5- Relações Trigonométricas

Fórmula Fundamental

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Fórmulas Secundárias

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha$$

$$1 + \text{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cosec}^2 \alpha$$

$$\text{tg } \alpha \times \text{cotg } \alpha = 1$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$$

Fórmulas de Adição

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \times \cos y \pm \operatorname{sen} y \times \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \times \cos y \mp \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} y} \quad \left(x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \times \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x} \quad (x \pm y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Fórmulas de Duplicação

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \times \operatorname{sen} x \times \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \times \operatorname{sen}^2 x = 2 \times \cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\operatorname{cotg}(2x) = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

Fórmulas de Bissecção

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x$$

Fórmulas de Transformação

$$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2 \times \operatorname{sen} \frac{x \pm y}{2} \times \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \times \cos \frac{x + y}{2} \times \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \times \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \times \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) - \cos (x + y)]$$

$$\operatorname{sen} x \times \cos y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (x - y) + \operatorname{sen} (x + y)]$$

5.6- Funções Trigonométricas

Função Seno

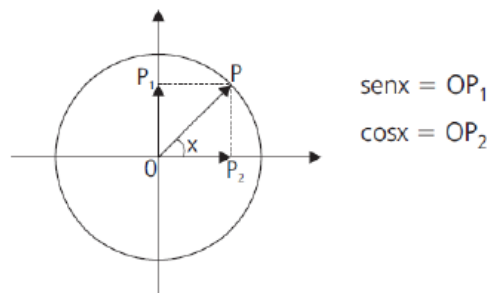
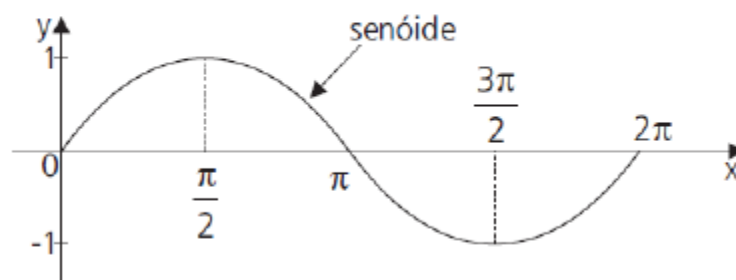


Gráfico de $y = \operatorname{sen} x$



1ª) O domínio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $\mathbb{R}$, pois para qualquer valor real de x existe um e apenas um valor para $\operatorname{sen} x$.

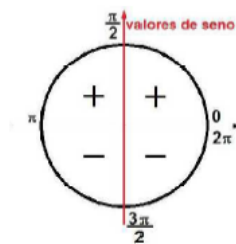
2ª) O conjunto imagem de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é o intervalo $[-1, 1]$.

3ª) A função seno não é sobrejetora, pois $[-1,1] \neq \mathbb{R}$, isto é, sua imagem não é igual ao contradomínio.

4ª) A função seno não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

5ª) A função seno é função ímpar, isto é, qualquer que seja $x \in D(f) = \mathbb{R}$, temos $\sin x = -\sin(-x)$.

Estudo do Sinal na Função Seno



A função é positiva para valores do 1º e 2º quadrantes e negativa para valores do 3º e 4º quadrantes.

Função Cosseno

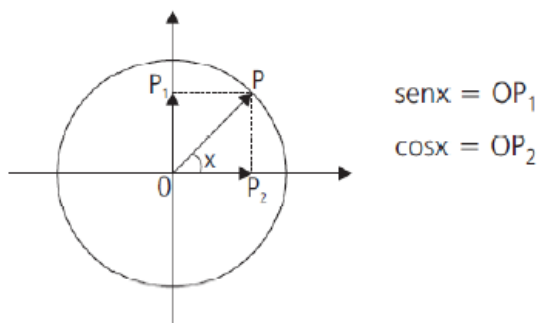
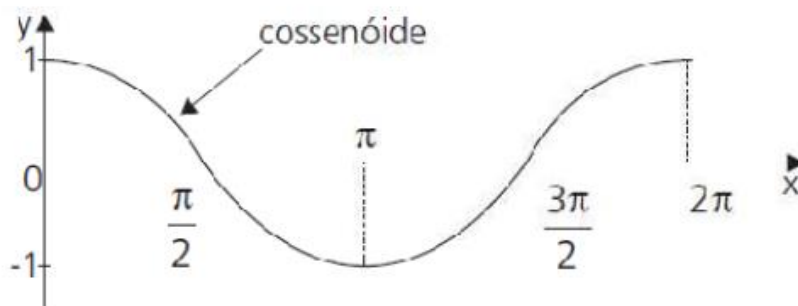


Gráfico de $y = \cos x$



1ª) A cossenoide não é uma nova curva, e sim uma senoide transladada $\pi/2$ unidades para a direita. A maioria dos aspectos relevantes da função cosseno são os mesmos da função seno.

2ª) O domínio é o mesmo: $D = \mathbb{R}$

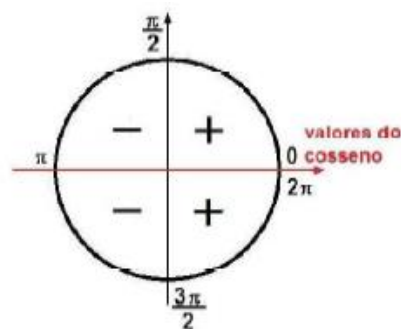
3ª) A imagem é a mesma: $Im = [-1, 1]$

4ª) O período é o mesmo: $p = 2\pi$.

5ª) A função cosseno não é nem injetiva nem sobrejetiva.

6ª) A função cosseno é par, pois temos $\cos x = \cos(-x)$.

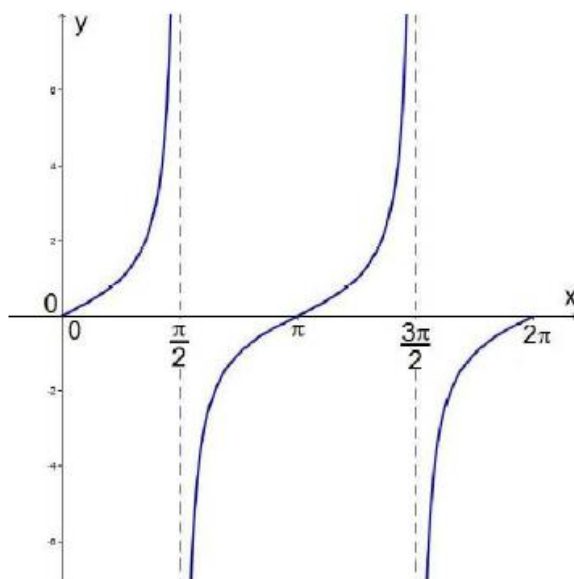
Estudo do Sinal na Função Cosseno



A função é positiva para valores do 1º e 4º quadrantes e negativa para valores do 2º e 3º quadrantes.

Função Tangente

Gráfico de $y = \tan x$



1ª) Domínio: $D=\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

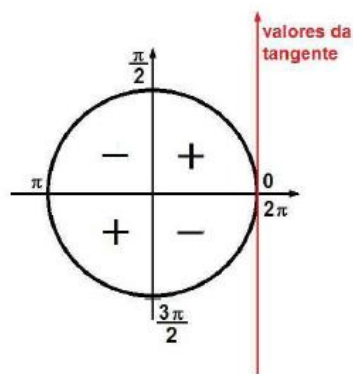
2ª) Imagem: $\text{Im} = \mathbb{R}$.

3ª) A função tangente não é injetiva, mas é sobrejetiva.

4ª) A função tangente é função ímpar, isto é, $\text{tg } x = -\text{tg}(-x)$

5ª) Período: $p = \pi$.

Estudo do sinal na Função Tangente



A função é positiva para valores do 1º e 3º quadrantes e negativa para do 2º e 4º quadrantes.

Funções Secante, Cossecante e Cotangente

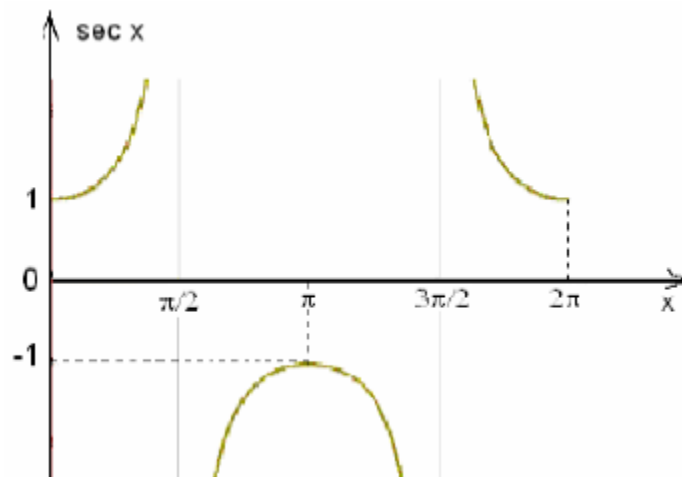
$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}, \text{ para } \text{sen } x \neq 0;$$

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}, \text{ para } \text{cos } x \neq 0;$$

$$\text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}, \text{ para } \text{sen } x \neq 0;$$

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}, \text{ para } \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \text{cos } x \neq 0.$$

Função Secante

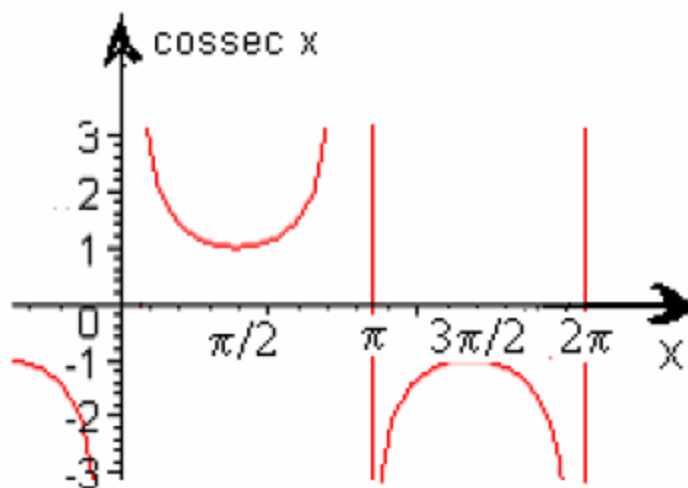


1º Domínio: $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n.\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

2º Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1, \text{ ou } y \geq 1\}$.

3º A função $y = \sec x$ é par, pois $\sec(-x) = \sec(x)$

Função Cossecante

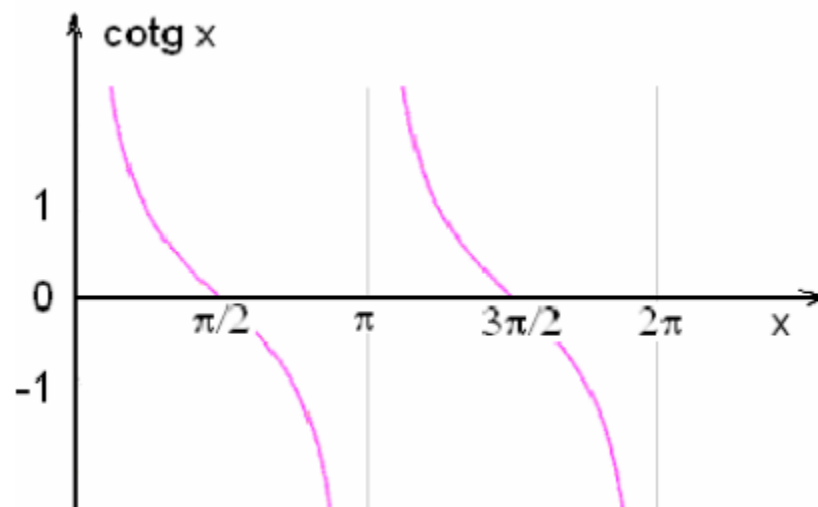


1º Domínio: $D = \mathbb{R} - \{n.\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

2º Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1, \text{ ou } y \geq 1\}$.

3º A função $y = \text{cossec } x$ é ímpar, pois $\text{cossec}(-x) = -\text{cossec}(x)$

Função Cotangente



1º Domínio: $D = \mathbb{R} - \{n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

2º Imagem: $Im = \mathbb{R}$

3º A função $y = \cotg x$ é ímpar, pois $\cotg(-x) = -\cotg x$

Unidade 6- Geometria Analítica

A Geometria Analítica baseia-se na ideia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados e os pontos do espaço por ternas ordenadas de números reais, é a interconexão entre a Geometria e Álgebra.

6.1- Coordenadas em Uma Reta

Uma reta diz-se orientada quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso chama-se negativo. Um eixo é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O , chamado origem. Todo eixo pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Cada ponto X da reta corresponde a um número real x , que é chamado de coordenada do ponto X .

6.2- Distância Entre Dois Pontos da Reta

Sendo x a coordenada de um ponto X e y a coordenada de um ponto Y , na reta, temos que a distância de X a Y é dada por:

$$d(X, Y) = |x - y| = |y - x|$$

Exemplo: Dados $x = 9$ e $y = 4$, tem-se :

$$d(X, Y) = |9 - 4| = |4 - 9|$$

$$d(X, Y) = 5$$

No caso particular em que $Y = 0$, temos que $d(X, Y) = |x - 0| = |0 - x|$ é a coordenada de X , ou seja $d(X, 0) = x$.

6.3- Coordenadas em um Plano

Um sistema de eixos ortogonais num plano é um par de eixos OX e OY que são perpendiculares e têm a mesma origem O . O plano munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^2$. Assim cada ponto do plano faz-se corresponder o par ordenado $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Indica-se por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) , em que x e y são números reais. Os números x e y chamam-se coordenadas cartesianas de um ponto P , em que x é a abscissa e y é a ordenada de P .

6.4- Distância Entre Dois Pontos do Plano

Sendo (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P_1 e (x_2, y_2) as coordenadas de um ponto P_2 , no plano, tem-se que a distância de P_1 a P_2 é dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo:

Sejam $A = (1; 6)$ e $B = (5; 9)$. Determine a distância de A até B .

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \rightarrow \sqrt{(5 - 1)^2 + (9 - 6)^2} \rightarrow \sqrt{4^2 + 3^2} \rightarrow \sqrt{25} = 5$$

6.5- Equação da Reta

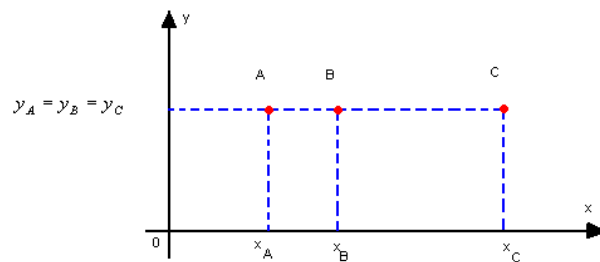
6.5.1- Condições de alinhamento de três pontos

Se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

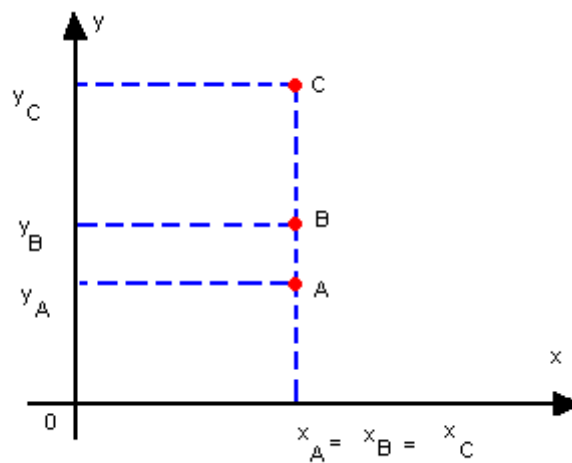
Para demonstrar esse teorema podemos considerar três casos:

a) três pontos alinhados horizontalmente



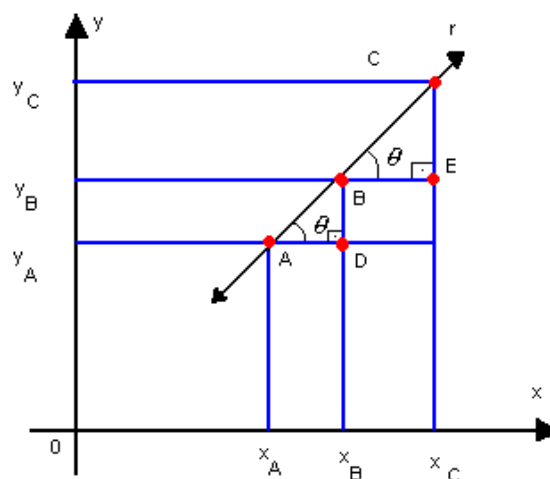
Neste caso, as ordenadas são iguais: $y_A = y_B = y_C$ e o determinante é nulo, pois a 2ª e a 3ª coluna são proporcionais.

b) três pontos alinhados verticalmente



Neste caso, as abscissas são iguais: $x_A = x_B = x_C$ e o determinante é nulo, pois a 1ª e a 3ª coluna são proporcionais.

c) três pontos numa reta não-paralela aos eixos



Pela figura, verificamos que os triângulos ABD e BCE são semelhantes. Então:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Desenvolvendo, vem:

$$\begin{aligned} \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow (y_C - y_B)(x_B - x_A) - (x_C - x_B)(y_B - y_A) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_B y_C - x_A y_C - x_B y_B + x_A y_B - x_C y_B + x_C y_A + x_B y_B - x_B y_A = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_A y_C - x_C y_B - x_B y_A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_A y_C - x_C y_B - x_B y_A$$

$$\text{então } \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observação: A recíproca da afirmação demonstrada é válida, ou seja,

$$\text{se } \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

então os pontos A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C) estão alinhados.

6.5.2- Equação geral

Pode – se estabelecer a equação geral de uma reta a partir da condição de alinhamento de três pontos.

Dada uma reta **r**, sendo **A**(x_A, y_A) e **B**(x_B, y_B) pontos conhecidos e distintos de **r** e **P**(x,y) um ponto genérico, também de **r**, estando **A**, **B** e **P** alinhados, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow -x y_A - x y_B - y x_A + x y_A + y x_B + x_A y_B = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_A y_B - x_B y_A) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo y_A - y_B = a, x_B - x_A = b e x_Ay_B - x_By_A=c, como a e b não são simultaneamente nulos ($A \neq B$), temos: ax + by + c = 0.(equação geral da reta r)

Essa equação relaciona **x** e **y** para qualquer ponto **P** genérico da reta. Assim, dado o ponto **P**(m, n):

- se am + bn + c = 0, **P** é o ponto da reta;

- se $am + bn + c \neq 0$, **P** não é ponto da reta.

Exemplos:

- Vamos considerar a equação geral da reta **r** que passa por **A**(1, 3) e **B**(2, 4).

Considerando um ponto **P**(x, y) da reta, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 4 - 6 - 4x - y = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

- Vamos verificar se os pontos **P**(-3, -1) e **Q**(1, 2) pertencem à reta **r** do exemplo anterior. Substituindo as coordenadas de **P** em $x - y + 2 = 0$, temos:

$$-3 - (-1) + 2 = 0 \Rightarrow -3 + 1 + 2 = 0$$

Como a igualdade é verdadeira, então $P \in r$.

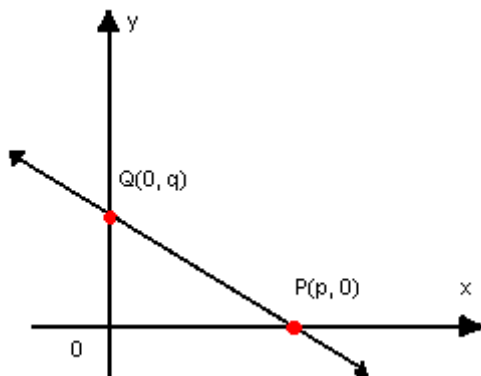
Substituindo as coordenadas de **Q** em $x - y + 2 = 0$, obtemos:

$$1 - 2 + 2 \neq 0$$

Como a igualdade não é verdadeira, então $Q \notin r$.

6.5.3- Equação segmentária

Considere a reta **r** não paralela a nenhum dos eixos e que intercepta os eixos nos pontos **P**(p, 0) e **Q**(0, q), com $p \neq 0$ e $q \neq 0$:



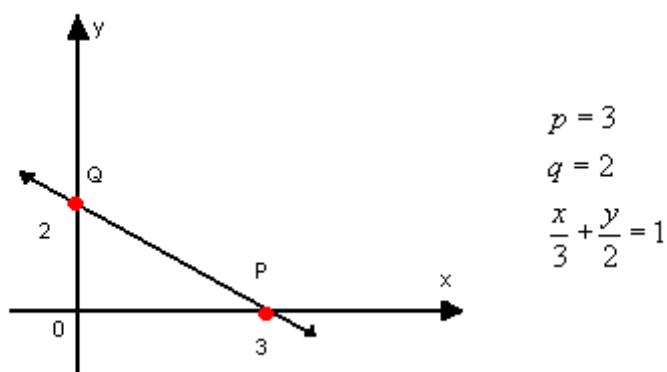
A equação geral de **r** é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -qx - py + pq = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0$$

Dividindo essa equação por pq ($pq \neq 0$), temos:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} - \frac{pq}{pq} = 0 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1} \text{ (equação segmentária da reta r)}$$

Como exemplo, vamos determinar a equação segmentária da reta que passa por **P**(3, 0) e **Q**(0, 2), conforme o gráfico:



6.5.4- Equações Paramétricas

São equações equivalentes à equação geral da reta, da forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$, que relacionam as coordenadas x e y dos pontos da reta com um parâmetro t .

Assim, por exemplo, $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de uma reta r .

Para obter a equação geral dessa reta a partir das paramétricas, basta eliminar o parâmetro t das duas equações:

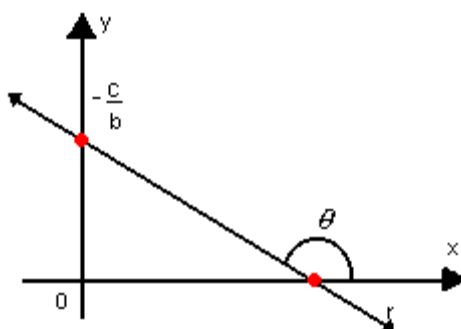
$$x = t + 2 \Rightarrow t = x - 2$$

Substituindo esse valor em $y = -t + 1$, temos:

$$y = -(x - 2) + 1 = -x + 3 \Rightarrow x + y - 3 = 0 \text{ (equação geral de } r\text{)}$$

6.5.5- Equação Reduzida

Considere uma reta r não-paralela ao eixo **Oy**:



Isolando y na equação geral $ax + by + c = 0$, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$, vem: $y = mx + q$.

Chamada equação reduzida da reta, em que $m = -\frac{a}{b}$ fornece a inclinação da reta em relação ao eixo **Ox**.

Quando a reta for paralela ao eixo **Oy**, não existe a equação na forma reduzida.

Coeficiente angular

Chamamos de *coeficiente angular* da reta **r** o número real **m** tal que: $m = \operatorname{tg} \theta$ ($\theta \neq 90^\circ$).

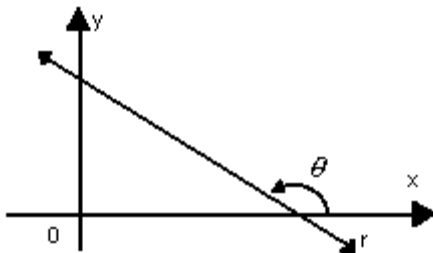
O ângulo θ é orientado no sentido anti-horário e obtido a partir do semieixo positivo **Ox** até a reta **r**. Desse modo, temos sempre $0 \leq \theta < \pi$.

Assim:

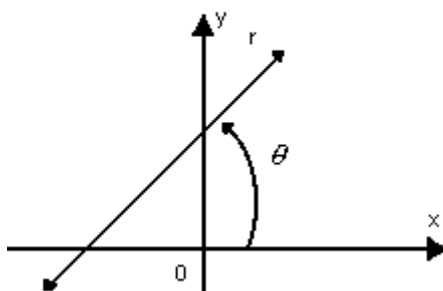
- para $0^\circ \leq \theta < 90^\circ, m > 0$ (a tangente é positiva no 1º quadrante)
- para $90^\circ < \theta < 180^\circ, m < 0$ (a tangente é negativa no 2º quadrante)

Exemplos:

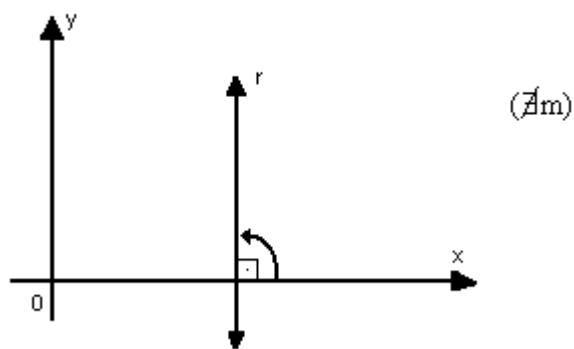
a) $90^\circ < \theta < 180^\circ$, θ é obtuso



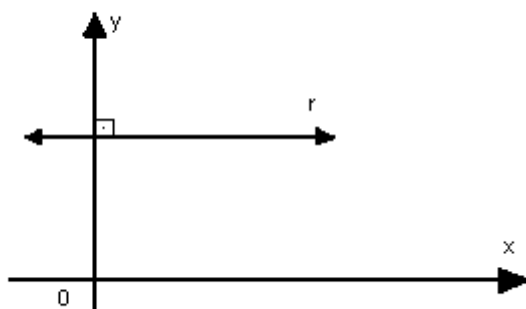
b) $0^\circ < \theta < 90^\circ$, θ é agudo



c) $\theta = 90^\circ$



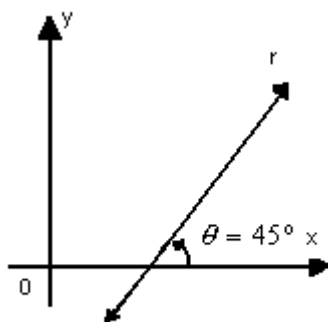
d) $\theta = 0^\circ$



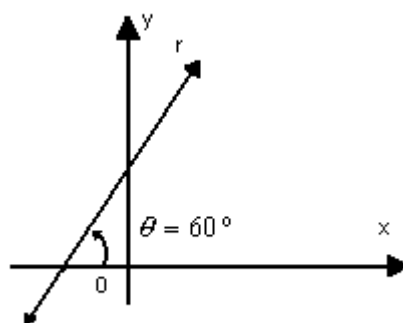
Determinação do coeficiente angular

Vamos considerar três casos:

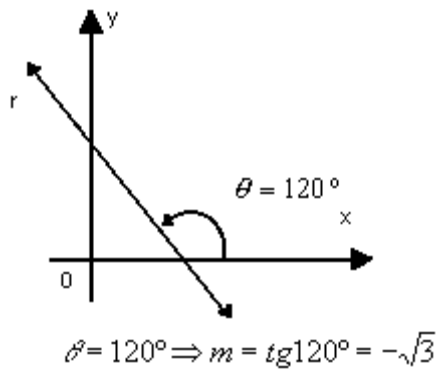
a) o ângulo θ é conhecido



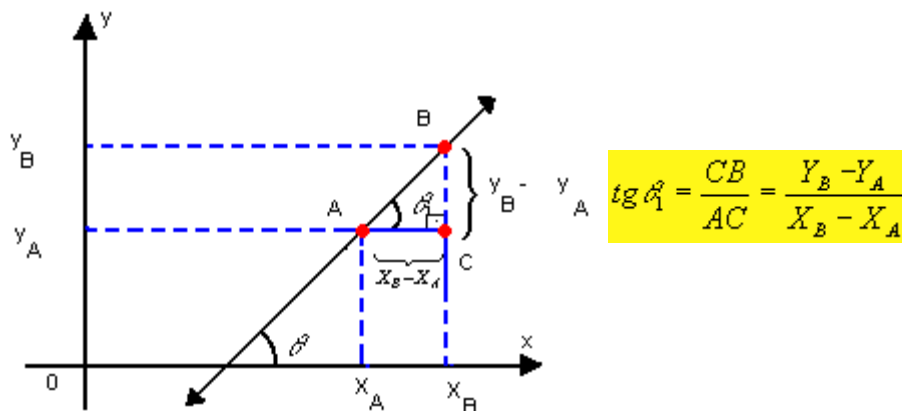
$$\theta = 45^\circ \Rightarrow m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$



$$\theta = 60^\circ \Rightarrow m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$



b) as coordenadas de dois pontos distintos da reta são conhecidas: **A**(x_A , y_A) e **B**(x_B , y_B)



Como $\theta_1 = \theta$ (ângulos correspondentes) temos que $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Mas, $m = \operatorname{tg} \theta$ Então:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular da reta que passa, por exemplo, por **A**(2, -3) e **B**(-2, 5) é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-3)}{-2 - 2} = \frac{8}{-4} = -2$$

c) a equação geral da reta é conhecida

Se uma reta passa por dois pontos distintos **A**(x_A , y_A) e **B**(x_B , y_B), temos:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando o Teorema de Laplace na 1ª linha, vem:

$$(Y_A - Y_B)x + (X_B - X_A)y + X_A Y_A - X_B Y_B = 0$$

Da equação geral da reta, temos:

$$\begin{cases} Y_A - Y_B = a \Rightarrow Y_B - Y_A = -a \\ X_B - X_A = b \end{cases}$$

$$m = \frac{\overbrace{Y_B - Y_A}^{-a}}{\underbrace{X_B - X_A}_b}$$

Substituindo esses valores em , temos:

$$m = -\frac{a}{b}$$

Exemplos:

1) Determinar o coeficiente angular e o coeficiente linear das retas abaixo.

a) $y = 8x - 10$

Coeficiente angular = 8

Coeficiente linear = - 10

b) $y = - 4x + 12$

Coeficiente angular = - 4

Coeficiente linear = 12

Cálculo do coeficiente angular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2) Determine o coeficiente angular e a equação da reta que passa pelos A(4, 12) e B(0,4)

Solução:

1.º passo (cálculo do m)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{12 - 4}{4 - 0} \Rightarrow m = \frac{8}{4} \Rightarrow m = 2$$

2.º passo (equação da reta)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 2 = \frac{y - 4}{x - 0} \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$$

Equação de uma reta r , conhecidos o coeficiente angular e um ponto de r

Seja r uma reta de coeficiente angular m . Sendo $P(X_0, Y_0)$, $P \in r$, e $Q(x, y)$ um ponto qualquer de r ($Q \neq P$), podemos escrever:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Como exemplo, vamos determinar a equação geral da reta r que passa por $P(1, 2)$, sendo $m=3$. Assim, temos $X_0=1$ e $Y_0=2$. Logo:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

que é a equação geral de r .

6.6- Representação gráfica de retas

Para representar graficamente as retas de equação $ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$), isolamos a variável y e atribuímos valores a x , obtendo pares ordenados que são pontos da reta.

Assim, é mais conveniente usar a equação na forma reduzida, já que ela apresenta o y isolado.

6.6.1- Coordenadas do ponto de intersecção de retas

A intersecção das retas r e s , quando existir, é o ponto $P(x, y)$, comum a elas, que é a solução do sistema formado pelas equações das duas retas.

Vamos determinar o ponto de intersecção, por exemplo, das retas $r: 2x + y - 4 = 0$ e $s: x - y + 1 = 0$. Montando o sistema e resolvendo-o, temos:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

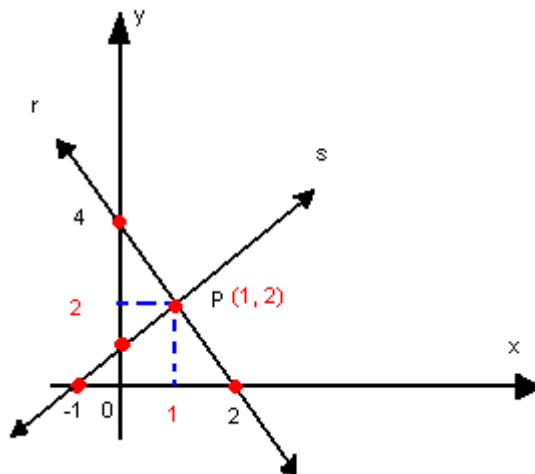
Substituindo esse valor em $x - y = -1$, temos:

$$1 - y = -1$$

$$y = 2$$

Logo, $P(1, 2)$ é o ponto de intersecção das retas r e s .

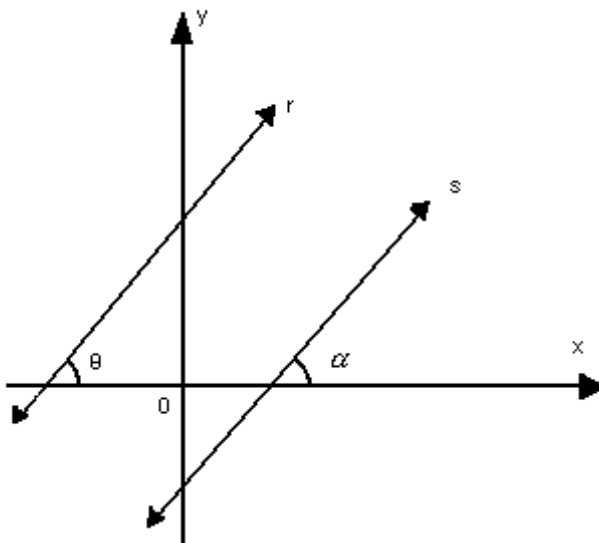
Graficamente, temos:



6.6.2- Posições relativas entre retas

Paralelismo

Duas retas, r e s , distintas e não-verticais, são paralelas se, e somente se, tiverem coeficientes angulares iguais.



Concorrência

Dadas as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, elas serão concorrentes se tiverem coeficientes angulares diferentes:

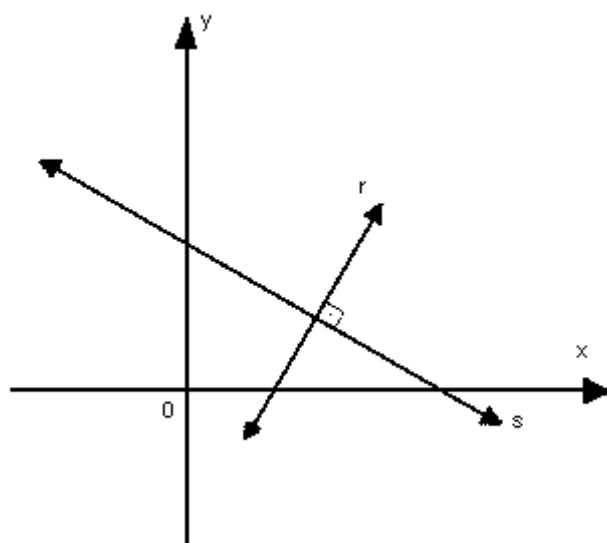
$$r \text{ e } s \text{ são concorrentes} \Rightarrow m_r \neq m_s \Rightarrow -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$$

Como exemplo, vamos ver se as retas $r: 3x - 2y + 1 = 0$ e $s: 6x + 4y + 3 = 0$ são concorrentes:

$$\left. \begin{array}{l} m_r = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2} \\ m_s = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{array} \right\} m_r \neq m_s \Rightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes}$$

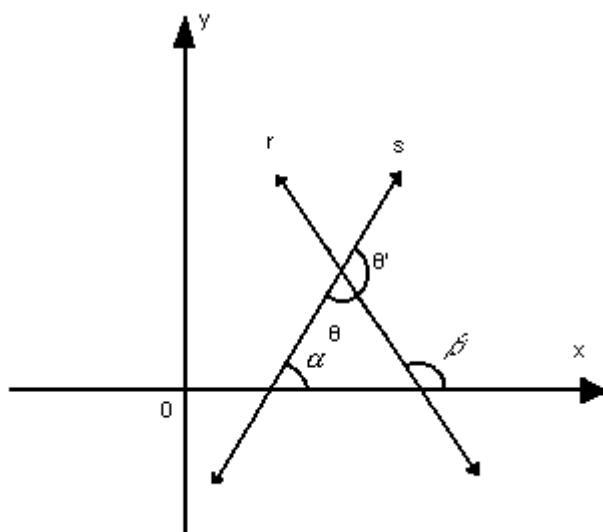
Perpendicularismo

Se r e s são duas retas não-verticais, então r é perpendicular a s se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1 . Lê-se $r \perp s$. Acompanhe o desenho:



6.6.3- Ângulo entre duas retas

Sendo r e s duas retas não-verticais e não-perpendiculares entre si, pelo teorema do ângulo externo ($\beta = \alpha + \theta$), temos:



$$\theta \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \beta - \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha}$$

Como $\operatorname{tg} \beta = m_r$ e $\operatorname{tg} \alpha = m_s$, vem :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

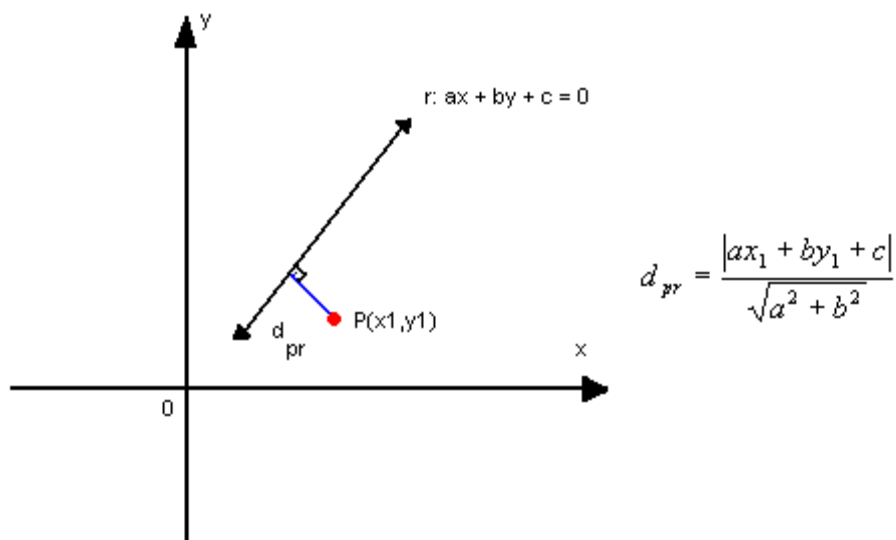
Dependendo da posição das duas retas no plano, o ângulo θ pode ser agudo ou obtuso. Logo:

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

Essa relação nos fornece o ângulo agudo θ entre r e s, pois $\operatorname{tg} \theta \geq 0$. O ângulo obtuso θ' será o suplemento de θ .

6.6.4-Distância entre ponto e reta

Dados um ponto $P(x_1, y_1)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$, a distância entre eles (d_{pr}) é dada por:



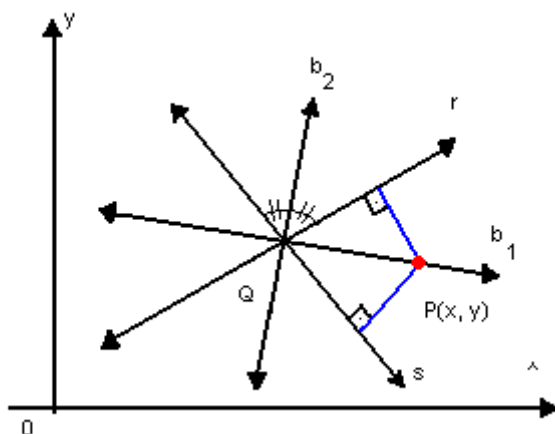
Vamos calcular a distância, por exemplo, do ponto $P(-1, 2)$ à reta $r: x - 2y + 1 = 0$.

Temos $P(-1, 2) = P(x_1, y_1)$, $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Assim:

$$d_{pr} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-1) + (-2)2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Bissetrizes

Dadas as retas concorrentes $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, o que se interceptam em um ponto Q , se $P(x, y)$ é um ponto qualquer de uma das bissetrizes, $P \neq Q$, então P equidista de r e s :



$$d_{Pr} = d_{Ps} \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Considerando o sinal positivo, obtemos uma bissetriz; considerando o sinal negativo, obtemos a outra.

Vejamos um exemplo:

Se $r: 3x + 2y - 7 = 0$ e $s: 2x - 3y + 1 = 0$, então suas bissetrizes são:

$$\frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \pm \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: 3x + 2y - 7 = 2x - 3y + 1 \Rightarrow x + 5y - 8 = 0 \\ b_2: 3x + 2y - 7 = -2x + 3y - 1 \Rightarrow 5x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

Unidade 7- Polinômios

7.1- Função Polinomial

Dados um número natural n e os números complexos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ e a_0 , denomina-se **função polinomial** ou **polinômio** na variável $x \in \mathbb{C}$ a função dada por :

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

Os números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ e a_0 , são denominados **coeficientes** do polinômio e as parcelas $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_2 x^2, a_1 x^1$ e a_0 são os **termos** do polinômio. O termo a_0 é o **termo independente** e n representa o grau do polinômio.

Exemplos:

$$1^{\text{a}}) P(x) = 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$$

$$2^{\text{a}}) M(x) = -x^5 + x^2 + 1$$

$$3^{\text{a}}) T(x) = x^4 + 2ix^2 - 3x + 2$$

7.2-Valor Numérico de um Polinômio

Dado um polinômio: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ e o número complexo α , dizemos que o **valor numérico** de P para $x = \alpha$ é o número que obtemos quando substituímos a variável x do polinômio pelo número α ; indicamos por $P(\alpha)$ (lemos: P de α)

$$P(\alpha) = a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + \dots + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha) + a_0$$

Quando $P(\alpha) = 0$ dizemos que α é uma raiz ou zero do polinômio.

Exemplos:

1) Obter o valor numérico do polinômio:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 3 \text{ para } x = -2.$$

Solução

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) - 3 = -24 + 8 - 2 - 3 = -21$$

2¹) Verificar quais números do conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ são raízes de

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Solução:

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0 \Rightarrow -2 \text{ é raiz de } P(x)$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -1 - 2 + 5 + 6 = 8 \Rightarrow -1 \text{ não é raiz de } P(x)$$

$$P(0) = (0)^3 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 0 - 0 - 0 + 6 = 6 \Rightarrow 0 \text{ não é raiz de } P(x)$$

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0 \Rightarrow 1 \text{ é raiz de } p(x)$$

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 8 - 10 + 6 = -4 \Rightarrow 2 \text{ não é raiz de } p(x)$$

$$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0 \Rightarrow 3 \text{ é raiz de } P(x)$$

3) Determine m para que $1 + i$ seja raiz de $P(x) = x^2 + mx + 2$.

Solução:

$$P(1 + i) = (1 + i)^2 + m(1 + i) + 2$$

$$P(1 + i) = 1 + 2i + i^2 + m + mi + 2$$

$$P(1 + i) = 1 + 2i - 1 + m + mi + 2$$

$$P(1 + i) = (m + 2) + (m + 2)i$$

Para que $P(1 + i) = 0$, devemos ter

$$m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

4) Se $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, determine o valor de $P(x)$ para $x = 2$.

Solução:

$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, substituindo o x por 2, teremos:

$P(2) = (2)^3 + 2 \cdot (2)^2 + (2) - 4$, resolvendo a expressão, verificamos que:

$$P(2) = (2)^3 + 2 \cdot (2)^2 + (2) - 4,$$

$$P(2) = 8 + 2 \cdot 4 + 2 - 4,$$

$$P(2) = 8 + 8 + 2 - 4,$$

$$P(2) = 14$$

Observações:

1ª) Um polinômio P é chamado de **nulo** ou **identicamente nulo** quando para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$ tivermos $P(\alpha) = 0$. Isso só acontece quando todos os coeficientes de $P(x)$ forem iguais a zero.

Exemplo:

$P(x) = 0x^2 + 0x + 0$ é identicamente nulo.

2ª) O número zero só é raiz de um polinômio $P(x)$ quando o termo independente de $P(x)$ for nulo.

Exemplo:

1º) 0 é raiz de $P(x) = x^3 - 3x^2 + x$

2º) 0 não é raiz de $P(x) = x^3 + 2x - 1$

3ª) O valor numérico de um polinômio $P(x)$ para $x = 1$ é igual à soma dos seus coeficientes.

Exemplos:

1º) A soma dos coeficientes de

$$P(x) = 6x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \text{ é } \dots\dots\dots$$

$$\text{Soma} = P(1) = 6 - 3 + 3 - 4 = 2$$

2º) A soma dos coeficientes de $P(x) = x^2 + 2x - 1)^3$ é

$$\text{Soma } P(1) = (1^2 + 2 \cdot 1 - 1)^3 = 2^3 = 8.$$

7.3. Grau de um Polinômio

Dado um polinômio $P(x)$ não-nulo, chamamos grau de P , e indicamos por G_P , o maior dos expoentes de x que tem coeficiente não-nulo. Quando o polinômio é nulo, o seu grau não é definido.

Exemplos:

1º) Indicar o grau de cada um dos polinômios abaixo:

a) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7 \Rightarrow G_P = 5$

b) $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 \Rightarrow G_P = 3$

c) $P(x) = x^2 - x^5 + 2 \Rightarrow G_P = 5$

d) $P(x) = 3 \Rightarrow G_P = 0$

e) $P(x) = 0 \Rightarrow \nexists G_P$

2º) Estudar as condições para que o polinômio $P(x) = (a - 3)x^2 + (b - 1)x + (c - 2)$ tenha grau igual a zero.

Solução:

Devemos ter:

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$c - 2 \neq 0 \Rightarrow c \neq 2$$

3º) Discutir, para $a \in \mathbb{C}$, o grau de

$$P(x) = (a^2 - 1)x^3 + (a + 1)x^2 + (a - 1)x + 2$$

Solução:

Se $a^2 - 1 \neq 0$, ou seja, $a \neq 1$ e $a \neq -1$, então,
 $G_P = 3$.

Se $a = 1$, temos:

$$P(x) = 0x^3 + 2x^2 + 0x + 2, \text{ então, } G_P = 2$$

Se $a = -1$, temos:

$$P(x) = 0x^3 + 0x^2 - 2x + 2, \text{ então, } G_P = 1$$

3º) O número de raízes reais do polinômio $p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ é:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução:

$$P(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$\text{Raízes de } P(x) \Rightarrow P(x) = 0 \therefore$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{complexas}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ou } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{Raízes reais} = 2$$

Resposta: C

4º) Calcular o valor de m para que o polinômio $p(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - x + 4$, seja

- a) do 3º grau.
b) do 2º grau.

Solução:

a) Para o polinômio ser do 3º grau, o coeficiente de x^3 deve ser diferente de zero.

Então:

$$m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 1 \Rightarrow m \neq 1 \text{ e } m \neq -1$$

Portanto, o polinômio é do 3º grau se $m \neq 1$ e $m \neq -1$.

b) Para o polinômio ser do 2º grau, o coeficiente de x^3 deve ser igual a zero e o coeficiente de x^2 diferente de zero. Então:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ ou } m = -1$$

$$m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

Portanto, o polinômio é do 2º grau se $m = 1$.

7.4- Operações com Polinômios

Considere os polinômios $-2x^2 + 5x - 2$ e $-3x^3 + 2x - 1$. Vamos efetuar a adição e a subtração entre eles.

Adição

$(-2x^2 + 5x - 2) + (-3x^3 + 2x - 1) \rightarrow$ eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal

$-2x^2 + 5x - 2 - 3x^3 + 2x - 1 \rightarrow$ reduzir os termos semelhantes

$-2x^2 + 7x - 3x^3 - 3 \rightarrow$ ordenar de forma decrescente de acordo com a potência

$$-3x^3 - 2x^2 + 7x - 3$$

Subtração

$(-2x^2 + 5x - 2) - (-3x^3 + 2x - 1) \rightarrow$ eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal

$-2x^2 + 5x - 2 + 3x^3 - 2x + 1 \rightarrow$ reduzir os termos semelhantes

$-2x^2 + 3x - 1 + 3x^3 \rightarrow$ ordenar de forma decrescente de acordo com a potência

$$3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

Multiplicação de polinômio por monômio

Exemplo:

$(3x^2) \cdot (5x^3 + 8x^2 - x) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva da multiplicação

$$15x^5 + 24x^4 - 3x^3$$

Multiplicação de polinômio por polinômio

Para efetuarmos a multiplicação de polinômio por polinômio também devemos utilizar a propriedade distributiva.

Exemplo:

$$(x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 6)$$

$$x^2 \cdot (x - 1) + 2x \cdot (x - 1) - 6 \cdot (x - 1)$$

$$(x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) - (6x - 6)$$

$x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 6x + 6 \rightarrow$ reduzindo os termos semelhantes.

$$x^3 + x^2 - 8x + 6$$

Divisão de Polinômios

Na divisão de polinômios, utilizamos duas regras matemáticas fundamentais: realizar a divisão entre os coeficientes numéricos e divisão de potências de mesma

base (conservar a base e subtrair os expoentes). Quando trabalhamos com divisão, utilizamos também a multiplicação no processo. Observe o seguinte esquema:

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente} \end{array} \Leftrightarrow \text{quociente} * \text{divisor} + \text{resto} = \text{dividendo}$$

Sejam polinômios $P(x)$ e $D(x)$, com $D(x)$ não nulo. Pode-se efetuar a divisão de $P(x)$ por $D(x)$ e determinar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, que satisfaçam as condições a seguir:

$$1^a) Q(x) \cdot D(x) + R(x) = P(x)$$

$$2^a) \text{gr}(R) < \text{gr}(D) \text{ ou } R(x) = 0$$

$P(x)$	$D(x)$
$R(x)$	$Q(x)$

Nessa divisão chamamos:

- $P(x)$ é o dividendo
- $D(x)$ é o divisor
- $Q(x)$ é o quociente
- $R(x)$ é o resto da divisão

Observação: Quando temos $R(x) = 0$ dizemos que a divisão é exata, ou seja, $P(x)$ é divisível por $D(x)$ ou $D(x)$ é divisor de $P(x)$.

$\text{Se } D(x) \text{ é divisor de } P(x) \Leftrightarrow R(x) = 0$

Vamos dividir um polinômio por um monômio, com o intuito de entendermos o processo operatório.

Observe:

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r|l}
 12x^3 + 4x^2 - 8x & 4x \\
 \hline
 -12x^3 & 3x^2 + x - 2 \\
 \hline
 0x + 4x^2 & \\
 -4x^2 & \\
 \hline
 0x - 8x & \\
 +8x & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Caso queira verificar se a divisão está correta, basta multiplicar o quociente pelo divisor, com vistas a obter o dividendo como resultado.

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo** $4x * (3x^2 + x - 2) + 0 = 12x^3 + 4x^2 - 8x$.

Caso isso ocorra, a divisão está correta. No exemplo a seguir, iremos dividir polinômio por polinômio. Veja:

Exemplo 2:

$$\begin{array}{r}
 10x^2 - 43x + 40 \quad | \quad 2x - 5 \\
 -10x^2 + 25x \\
 \hline
 0x - 18x + 40 \\
 18x - 45 \\
 \hline
 -5
 \end{array}$$

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo** $(2x - 5) \cdot (5x - 9) + (-5) = 10x^2 - 18x - 25x + 45 + (-5) = 10x^2 - 43x + 45 - 5 = 10x^2 - 43x + 40$

Exemplo 3:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 \quad | \quad 2x^2 - 4x + 5 \\
 -6x^4 + 12x^3 - 15x^2 \\
 \hline
 0x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 \\
 -2x^3 + 4x^2 - 5x \\
 \hline
 0x^3 - 2x^2 + 4x - 5 \\
 2x^2 - 4x + 5 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Verificando → **quociente * divisor + resto = dividendo**

$$(3x^2 + x - 1) \cdot (2x^2 - 4x + 5) + 0 = 6x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 5 = 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$$

Exemplo 4:

$$\begin{array}{r}
 12x^3 - 19x^2 + 15x - 3 \quad | \quad 3x^2 - x + 2 \\
 -12x^3 + 4x^2 - 8x \\
 \hline
 0x^3 - 15x^2 + 7x - 3 \\
 +15x^2 - 5x + 10 \\
 \hline
 2x + 7
 \end{array}$$

Verificando $\rightarrow$ **quociente * divisor + resto = dividendo**

$$\begin{aligned}(4x - 5) \cdot (3x^2 - x + 2) + (2x + 7) &= \\ 12x^3 - 4x^2 + 8x - 15x^2 + 5x - 10 + (2x + 7) &= \\ 12x^3 - 19x^2 + 13x - 10 + 2x + 7 &= \\ 12x^3 - 19x^2 + 15x - 3.\end{aligned}$$

Método da Chaves

- Divide-se o termo de maior grau de $P(x)$ pelo de maior grau de $D(x)$;
- Obtêm-se assim o primeiro termo do quociente $Q(x)$;
- Multiplica-se o quociente obtido, por $D(x)$;
- O resultado é colocado com o sinal trocado, sob os termos semelhantes de $P(x)$;
- Somam-se os termos semelhantes, e os termos de $P(x)$ e os termos que não têm semelhantes devem ser repetidos;
- Obtêm-se um resto parcial;
- Repetem-se os passos anteriores com o resto parcial obtido até que o grau do resto $R(x)$ se torne menor que grau do divisor $D(x)$.

7.5- Teorema do Resto

O Teorema do Resto diz que:

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pelo binômio $ax + b$ é igual a $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Observa-se que $\left(-\frac{b}{a}\right)$ é a raiz do divisor. Então, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio $ax + b$ é sempre igual ao valor numérico de $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Exemplos:

1) Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^2 + 5x - 1$ pelo binômio $D(x) = x + 1$.

Solução:

Neste caso, ao invés de dividirmos usando o Método da chave, achamos a raiz do divisor $D(x)$:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

E utilizamos o Teorema do Resto, que diz que o resto da divisão de um polinômio por um binômio de primeiro grau é o valor numérico do polinômio para $x = -1$, isto é, o resto procurado é igual a $P(-1)$.

$$P(-1) = (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 \Rightarrow P(-1) = -5 = R(x)$$

Logo, $R(x) = -5$.

2) Determinar o valor do coeficiente c , para que o polinômio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - cx + 2$ seja divisível pelo binômio $D(x) = x - 2$.

Solução:

Se $P(x)$ é divisível por $D(x) = x - 2$, então $P(2) = 0$. Pois o Resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ deve ser zero e pelo Teorema do Resto o resto é valor numérico da raiz de $D(x)$.

Calculando a raiz de $D(x)$, temos $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Logo, $R(x) = 0 = P(2)$

$$\text{Assim } P(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (8) + 5 \cdot (4) - 2c + 2 = 0 \Rightarrow 16 + 20 - 2c + 2 = 0 \Rightarrow c = 19$$

Assim o coeficiente $c = 19$.

7.6- Dispositivo de Briot-Ruffini

Compreendendo um dispositivo que auxilia na divisão de polinômios: o dispositivo de Briot-Ruffini. Esse dispositivo utiliza uma raiz do polinômio e seus coeficientes para calcular a divisão do polinômio pela sua raiz.

Podemos realizar a divisão de polinômios utilizando o método tradicional para a divisão: o Método das Chaves. Entretanto, dois matemáticos (Paolo Ruffini e A. Briot) criaram um dispositivo prático para realizar essa divisão conhecido como: dispositivo de Briot-Ruffini. Esse algoritmo é utilizado para dividirmos polinômios por um binômio do tipo $(x-a)$, empregando apenas os coeficientes do polinômio e o termo constante (a) .

Termo constante do Divisor com sinal Trocado	coeficientes de x do dividendo p(x)	termo constante do dividendo p(x)
	Coeficientes do quociente	resto

Exemplos:

1) Efetuar a divisão de p(x) por h(x), na qual: $p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $h(x) = x + 1$.

-1	1	4	3
	1 (repita o primeiro coeficiente)		

Agora multiplique esse termo repetido pelo divisor, o resultado será somado ao próximo termo do dividendo p(x).

-1	1	4	3
	1	$-1+4=3$	
	$1 \times (-1) = -1$	3	

Repita o processo agora para o novo elemento, multiplique esse número pelo divisor e some-o ao próximo termo.

-1	1	4	3
	1	$-1+4=3$	$-3+3=0$
	$1 \times (-1) = -1$	3	0
		$3 \times (-1) = -3$	

Obtemos o resto 0 e um quociente da seguinte forma:

$$q(x) = 1x + 3$$

Para verificarmos se a divisão foi feita de forma correta, podemos utilizar o algoritmo da divisão que diz o seguinte:

$$p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Dessa forma, temos:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 1x + 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Logo, a divisão foi feita corretamente, pois ao verificar os termos da divisão no algoritmo da divisão constatamos que a igualdade é verdadeira.

2) Efetuar a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

	3	-5	1	-2
2	3	1	3	4

$$\text{Logo, } p(x) = (3x^2 + x + 3)(x - 2) + 4$$

Resto = 4 e o quociente = $3x^2 + x + 3$.

3) Verifique que o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 10$ é divisível por $d(x) = x - 2$.

Solução:

Raiz do divisor: $x=2$

$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 - 2 - 10 = 16 - 4 - 2 - 10 = 0$. Como $p(2) = 0$, logo $p(x)$ é divisível por $d(x)$.

Exercícios:

1) Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ por $h(x) = x + 3$

b) $p(x) = x^4 + 3x^2 + x - 5$ por $h(x) = x + 2$

- c) $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ por $h(x) = x - 4$
d) $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $h(x) = x - 5$
e) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$
f) $p(x) = x^2 - 2x + 1$ por $h(x) = 3x + 1$

2) Calcule o valor de **a** sabendo que:

- a) $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ é divisível por $h(x) = x - 1$;
b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + (2a + 1)x + a + 3$ é divisível por $x + 4$.

Gabarito

- 1) a) $q(x) = 5x - 18$; $r(x) = 56$
b) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 13$; $r(x) = 21$
c) $q(x) = 2x^2 + x + 6$; $r(x) = 25$
d) $q(x) = 2x^2 + 8$; $r(x) = 37$
e) $q(x) = x^2 - x$; $r(x) = 2$
f) $q(x) = x/3 - 7/9$; $r(x) = 16/9$

- 2) a) -1
b) 43/3

7.7- Equações Algébricas ou Polinomiais

Chama-se **equação polinomial** de **grau** $n \in \mathbb{N}$ e **variável** x toda equação do tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0, \text{ com } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \text{ e } a_n \neq 0.$$

Exemplos de equações:

$$1 + 3x = 0, \quad 7 - 3x + \frac{2}{5}x^2 = 0, \quad x^5 - 3x^4 - \sqrt{2}x + 8 = 0.$$

Exemplos de equações que não são polinomiais:

$$\sqrt{x} + x - 1 = 0, \quad \frac{1}{x} + x^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2^x - 4 = 0$$

Uma equação polinomial pode ter uma, mais de uma, ou nenhuma raiz real. Convém observar que há um conjunto numérico que contém $\mathbb{R}$, o dos números complexos $\mathbb{C}$, no qual toda equação admite raízes.

Equação polinomial do 1º grau

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

Possui sempre uma única raiz, que é $x_0 = -b/a$.

Exemplo:

Resolver as equações:

$$(a) \quad (2x - 1)(x - 3) = 0;$$

$$(b) \quad x^2 - \sqrt{5}x = 0.$$

Um número real x é raiz da equação do item (a) se, e somente se, $2x - 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$, o que nos dá $x = 1/2$ ou $x = 3$. Logo, seu conjunto-solução é

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}.$$

Quanto à equação do item (b), colocando-se o fator comum x em evidência, obtemos

$$x(x - \sqrt{5}) = 0.$$

Assim, x é raiz dessa equação se, e somente se, $x = 0$ ou $x - \sqrt{5} = 0$. Segue-se que seu conjunto-solução é

$$S = \{0, \sqrt{5}\}.$$

Equação polinomial do 2º grau

Dado um número real $a \geq 0$, a equação $x^2 = a$ tem $\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ como conjunto solução. Observa-se que, se $a < 0$, o conjunto solução da equação é vazio em $\mathbb{R}$.

Fazendo uso da técnica de completar quadrados pode-se resolver uma equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, também conhecida como equação quadrática.

Essa técnica consiste em considerar expressões do tipo $x^2 + kx$, $k \in \mathbb{R}$, e escrevê-las na forma $(x + b)^2 - b^2$, $b \in \mathbb{R}$. Para isso, basta fazermos $b = k/2$, pois

$$x^2 + kx = x^2 + 2\frac{k}{2}x + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

o que nos dá

$$x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Por exemplo, para completarmos o quadrado de $x^2 + 3x$, fazemos

$$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

No caso da expressão $x^2 - 7x$, temos:

$$x^2 - 7x = x^2 + (-7)x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{-7}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}.$$

Exemplos:

Resolver as equações:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $2x^2 - x - 1 = 0$

a) Usando – se a identidade

$$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

tem – se

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Daí temos duas possibilidades:

$$x + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x + \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Resolvendo – se então cada uma dessas equações, obtemos as raízes da equação original que são

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

Logo, seu conjunto- solução é $S = \{-2, -1\}$.

b)

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$x - \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x - \frac{7}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Sendo assim, as raízes procuradas são

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$$

Logo, seu conjunto- solução é $S = \{3, 4\}$.

c) Usando a Fórmula Resolutiva

$a = 2$, $b = -1$ e $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.2.(-1) = 1 + 8 = 9.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2.2} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2.2} = 1.$$

Como vimos anteriormente, equação polinomial ou algébrica é toda equação da forma $p(x) = 0$, em que $p(x)$ é um polinômio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ de grau } n, \text{ com } n \geq 0$$

Exemplos:

$$x^4 + 9x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$10x^6 - 2x^5 + 6x^4 + 12x^3 - x^2 + x + 7 = 0$$

$$x^8 - x^6 - 6x + 2 = 0$$

$$x^{10} - 6x^2 + 9 = 0$$

As raízes de uma equação polinomial constituem o conjunto solução da equação. Para as equações em que o grau é 1 ou 2, o método de resolução é simples e prático. Nos casos em que o grau dos polinômios é 3 ou 4, existem expressões para a obtenção da solução.

7.7.1- Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Toda equação polinomial $p(x) = 0$, de grau n onde $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Exemplos:

1

1) Determine o valor do coeficiente K , sabendo que 2 é a raiz da equação:

$$2x^4 + kx^3 - 5x^2 + x - 15 = 0$$

Se 2 é raiz da equação, então temos:

$$2(2)^4 + k(2)^3 - 5(2)^2 + 2 - 15 = 0$$

$$2 \cdot 16 + k \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 2 - 15 = 0$$

$$32 + 8k - 20 + 2 - 15 = 0$$

$$8k + 34 - 35 = 0$$

$$8k - 1 = 0$$

$$8k = 1$$

$$k = 1/8$$

Temos que o valor do coeficiente k é $1/8$.

2) Determine o valor de m , sabendo que -3 é raiz da equação: $mx^3 + (m + 2)x^2 - 3x - m - 8 = 0$.

$$m(-3)^3 + (m + 2)(-3)^2 - 3(-3) - m - 8 = 0$$

$$m(-27) + (m + 2)(9) + 9 - m - 8 = 0$$

$$-27m + 9m + 18 + 9 - m - 8 = 0$$

$$-27m + 9m - m = 8 - 18 - 9$$

$$-19m = -19$$

$$m = 1$$

3) Resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$ em $\mathbb{C}$.

Solução:

$$x^3 + 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$x(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 2x + 2 = 0$$

De $x^2 + 2x + 2 = 0$, vem:

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = -1 + i \text{ ou } x = -1 - i$$

Portanto:

$$x^3 + 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 + i \text{ ou } x = -1 - i$$

Ou seja, o conjunto solução da equação é

$$S = \{0, -1 + i, -1 - i\}$$

4) Verificar qual a multiplicidade da raiz 2 na equação $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0$ e resolver a equação.

Solução:

Dividindo $P(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$ por $(x - 2)$, temos:

	1	-4	0	16	-16
2	1	-2	-4	8	0

Assim:

$$P(x) = (x - 2) (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$$

Dividindo $Q_1(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ por $(x - 2)$, temos:

		1	-2	-4	8
2		1	0	-4	0

$$\text{Assim: } P(x) = (x - 2) (x - 2) \cdot (x^2 - 4)$$

Como $x^2 - 4 = (x + 2) (x - 2)$, temos:

$$P(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 2)$$

Então, 2 é raiz tripla (multiplicidade 3) da equação $P(x) = 0$.

O conjunto solução da equação é:

$$S = \{2, -2\}$$

5) Resolver a equação $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$.

Solução

$$x^2(x + 1) - 3(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ou

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Assim: } S = \{-1, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

6) Resolver a equação $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

Solução

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x (x^2 - 4x + 3) = 0$$

Então:

$$x = 0$$

ou

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Assim:

$$S = \{0, 1, 3\} \text{ (conjunto solução).}$$

$$7) \text{ Resolver a equação: } 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Solução

$$2 - 3 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ é raiz da equação.}$$

Dividindo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por $(x - 1)$, temos:

	2	-3	2	-1
1	2	-1	1	0

$$\text{Assim: } P(x) = (x - 1)(2x^2 - x + 1)$$

Resolvendo a equação $2x^2 - x + 1 = 0$, temos:

$$\Delta = 1 - 8 = -7 = 7i^2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

$$\text{Assim: } S = \left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{7}i}{4}, \frac{1 - \sqrt{7}i}{4} \right\}$$

$$8) \text{ Calcule } m \text{ de modo que o número } \frac{1}{2} \text{ seja raiz da equação: } x^3 - 4x^2 + mx + 2 = 0$$

Solução

Se $\frac{1}{2}$ é raiz da equação, temos:
 $x^3 - 4x^2 + mx + 2 = 0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$$

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{4} + \frac{m}{2} + 2 = 0$$

$$1 - 8 + 4m + 16 = 0$$

$$4m = -9$$

$$m = -\frac{9}{4}$$

$$m = -\frac{9}{4}$$

9) Na equação: $x^4 + px^3 + px^2 + px + p = 0$, sabendo-se que 1 é raiz, então:

a) $p = -1/4$

b) $p = 0$ ou $p = 1$

c) $p = 0$ ou $p = -1$

d) $p = 1$ ou $p = -1$

e) $p = \frac{1}{3}$

Solução

$$P(1) = 1 + p + p + p + p = 0 \Rightarrow 1 + 4p = 0 \Rightarrow$$

$$p = -\frac{1}{4}$$

10) A multiplicidade da raiz $x_0 = 1$ da equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

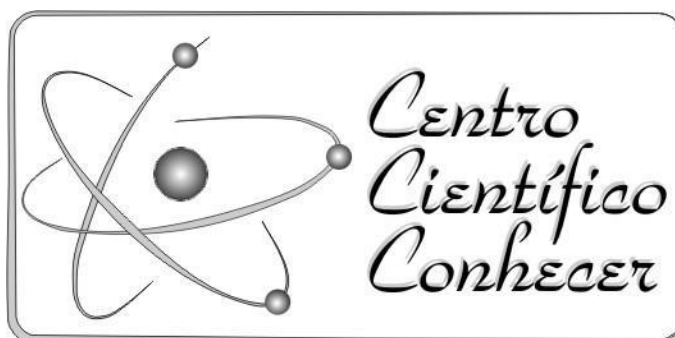
e) 5

Solução

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

1	1	-1	-3	5	-2
1	1	0	-3	2	0
1	1	1	-2	0	
1	1	2	0		
	1	3	0		

Logo, 1 é raiz de multiplicidade 3.



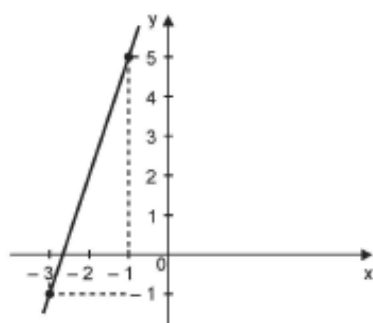
Avaliação A₁

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do primeiro módulo.

Cursista: _____

1ª Questão:

A reta r está representada na figura.

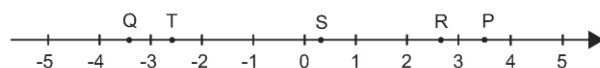


É correto afirmar que a equação da reta r é

- A) $y = -3x - 1$
- B) $y = -x + 5$
- C) $y = -x - 3$
- D) $y = 5x - 1$
- E) $y = 3x + 8$

2ª Questão:

Veja a reta numérica representada abaixo.



O número $-\sqrt{7}$ está melhor representado pelo ponto

- A) P B) Q C) R D) S E) T

3ª Questão:

O polinômio $p(x) = \frac{1}{2} (x + 1) (x + \sqrt{2})$ possui

- A) uma única raiz real.
- B) uma única raiz negativa.
- C) duas raízes positivas.
- D) duas raízes negativas.
- E) duas raízes inteiras.

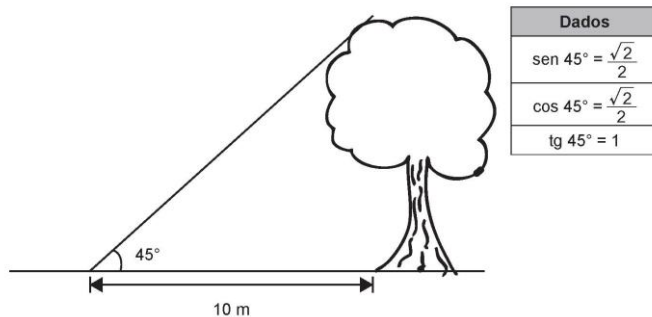
4ª Questão:

A equação da reta na forma reduzida que passa pelo ponto $(-2, -3)$ e tem inclinação igual a -2 é

- A) $y = -2x - 7$
- B) $y = -2x - 3$
- C) $y = -x - 5$
- D) $y = -2x - 2$
- E) $y = -2x + 7$

5ª Questão:

Observe a ilustração.



Qual é a altura dessa árvore?

- A) 6m B) 7m C) 8m D) 9m E) 10 m

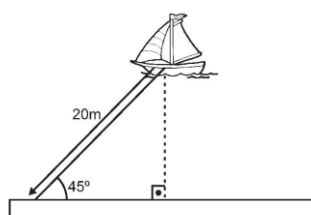
6ª Questão:

Uma bola é lançada verticalmente para cima. Após t segundos do lançamento, sua altura em metros é dada pela expressão $h(t) = 1 + 40t - 5t^2$. A altura máxima alcançada pela bola será igual a

- A) 40 m B) 61 m C) 76 m D) 81 m E) 162 m

7ª Questão:

Um pequeno barco está amarrado à margem de um rio por uma corda de 20 m de comprimento, completamente esticada, como mostra o desenho abaixo.



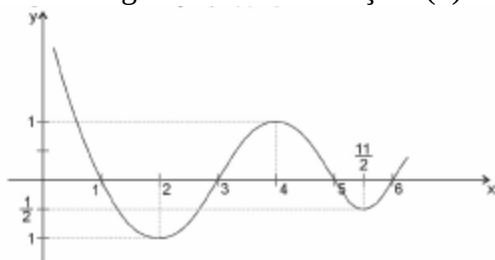
Considere:
 $\text{Sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\text{Cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A distância, em metros, do barco à margem é

- A) 10
- B) $5\sqrt{6}$
- C) $10\sqrt{2}$
- D) $10\sqrt{3}$
- E) 20

8ª Questão:

Observe o gráfico de uma função $f(x)$ representado abaixo.



A função acima tem um zero em

- A) $x = \frac{3}{2}$
- B) $x = 2$
- C) $x = 4$
- D) $x = 5$
- E) $x = \frac{11}{2}$

9ª Questão:

Em uma prova discursiva de Matemática com apenas duas questões, 470 alunos acertaram somente uma das questões e 260 acertaram a segunda. Sendo que 90 alunos acertaram as duas, e 210 alunos erraram a primeira questão. Quantos alunos fizeram a prova?

A) 730 B) 600 C) 560 D) 1030 E) nda

10ª Questão:

Com base nos dados da questão anterior, quantos alunos não acertaram nenhuma das duas questões? A) 30 B) 100 C) 40 D) 140 E) nda



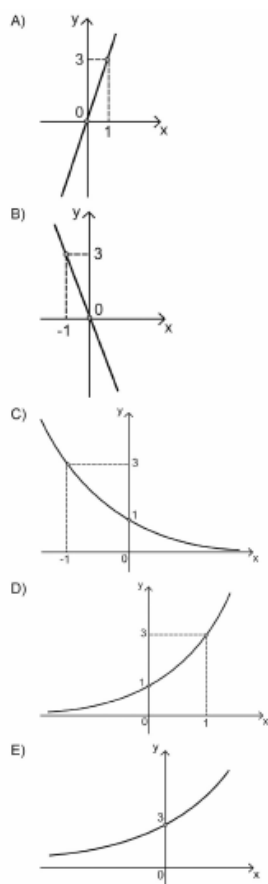
Avaliação A₂

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do primeiro módulo.

Cursista: _____

1ª Questão:

A função $y = 3^x$ está representada em qual dos gráficos abaixo?



2ª Questão:

Em uma escola foi realizada uma pesquisa sobre o gosto musical dos alunos. Os dados obtidos foram os seguintes:

458 alunos disseram que gostam de Rock

112 alunos optaram por Pop

36 alunos gostam de MPB

62 alunos gostam de Rock e Pop

Quantos alunos foram entrevistados?

A) 544 B) 570 C) 520 D) 668 E) nda

3ª Questão:

O vértice da função $f(x) = x^2 - 8x + 15$ é um ponto de

- A) mínimo de coordenadas $(-1, -4)$.
- B) máximo de coordenadas $(4, 1)$.
- C) mínimo de coordenadas $(4, -1)$.
- D) máximo de coordenadas $(-4, -1)$.
- E) mínimo de coordenadas $(1, 4)$.

4ª Questão:

Daniela representou na reta numérica abaixo alguns pontos.



Nessa reta numérica, os números reais $\sqrt{2}$, $2/5$ e $13/5$ podem ser representados, respectivamente, pelos pontos

- A) X, Z e W.
- B) X, Y e Z.
- C) Y, X e W.
- D) Y, Z e W.
- E) Y, X e Z.

5ª Questão:

A equação da reta que contém o ponto $(2,3)$ e tem inclinação $\sqrt{3}$ é

- A) $y - 3 = \sqrt{3} (x - 2)$
- B) $y - 2 = -\sqrt{3} (x - 3)$
- C) $y - 2 = \sqrt{3} (x - 3)$
- D) $y - 3 = -\sqrt{3} (x - 2)$
- E) $y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6ª Questão:

Sabendo que 12 é raiz de $p(x) = x^2 - mx + 6$, determine o valor de m e assinale a resposta correta.

- A) 25 B) $\frac{25}{2}$ C) 144 D) 30 E) nda

7ª Questão:

As raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ são

- A) { 1, 2, 3 } B) { 2, 3, 4 } C) { 1, 3, 5 } D) { 2, 4, 6 } E) nda

8ª Questão:

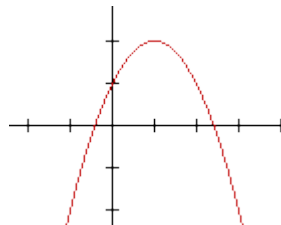
O resto da divisão do polinômio

$P(x) = x^{1032} - 12x^3 + 15$ pelo binômio $Q(x) = x + 1$ vale

- A) 1032 B) 28 C) 15 D) 12 E) 4

9ª Questão:

A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo.



Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que

- (A) $a < 0$, $\Delta < 0$ e $c > 0$
(B) $a > 0$, $\Delta > 0$ e $c < 0$
(C) $a > 0$, $\Delta > 0$ e $c > 0$
(D) $a < 0$, $\Delta > 0$ e $c < 0$
(E) $a < 0$, $\Delta > 0$ e $c > 0$

10ª Questão:

É verdade que $\cos 5240^\circ$ é equivalente a

- A) $\cos(-20^\circ)$ B) $\cos 20^\circ$ C) $-\cos 20^\circ$ D) $-\cos 160^\circ$ E) $\cos 180^\circ$