CURSO DE MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA

MÓDULO 1

CAPÍTULO 1 – RAZÕES e PROPORÇÕES

1- Introdução

O conceito de proporção tem uma importância muito grande, não apenas em Matemática, como também no nosso dia a dia. Frequentemente utilizamos proporções em nosso cotidiano, muitas vezes sem empregar símbolos matemáticos.

Existem muitas situações, seja na vida cotidiana, na ciência ou nos negócios que demandam o uso de razões e proporções. Por exemplo, na cozinha, se há a intenção de acrescentar ou diminuir algum ingrediente, as razões e proporções são usadas para determinar isso – "3 ovos para cada suas duas colheres de farinha". Pode-se constatar outro uso quando farmacêuticos ministram medicamentos, eles devem ter muita atenção às proporções dos fármacos. Razão e Proporção são conceitos diretamente relacionados à grandeza.

Grandeza é uma relação numérica estabelecida com um objeto. Ou melhor, é tudo que se pode contar, medir, pesar, enumerar, etc. Ou seja, é todo valor que, ao ser relacionado a outro de tal forma, quando há a variação de um, como consequência o outro varia também. Em nosso dia a dia quase tudo se associa a duas ou mais grandezas. Assim sendo, a altura de uma árvore, o volume de um tanque, o peso de um corpo, a quantidade pães, entre outros, são grandezas. Quando falamos em: velocidade, tempo, peso, espaço, etc., estamos lidando diretamente com grandezas que estão relacionadas entre si.

Razão e proporção são conceitos que estão intimamente ligados. Dizemos que existe uma proporção ao observar duas ou mais razões e construir uma relação entre elas.

2- Razão

Usamos razão para fazer comparação entre duas grandezas. Ao dividir uma grandeza por outra, estamos comparando a primeira com a segunda, que passa a ser a base da comparação.

Sabendo que existem duas grandezas a e b, a razão entre a e b com b diferente de zero, é o quociente entre a e b: a: b ou a / b ou $\frac{a}{b}$.

Lê-se : "a para b" ou "a está para b".

Obs.: O numerador a chamamos de antecedente, e o denominador b chamamos de consequente dessa razão.

Exemplos:

a- Se numa classe tivermos 40 meninos e 30 meninas, qual a razão entre o número de meninos e o número de meninas?

$$\frac{\text{número de meninos}}{\text{número de meninas}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

b- Uma escola tem 1200 m² de área construída e 3000 m² de área livre. A razão da área construída para a área livre é ....

$$razão = \frac{área\ construída}{área\ livre} = \frac{1200}{3000} = \frac{2}{5}$$

Obs.: Isso significa que a área construída representa $\frac{2}{5} = 0{,}4$ ou 40% da área livre.

c- Dos 1200 inscritos num concurso, passaram 240 candidatos. Razão dos candidatos aprovados nesse concurso.

$$240:1200 = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$$

(de cada 5 candidatos inscritos, 1 foi aprovado).

d- Para cada 100 convidados, 75 eram mulheres. Razão entre o número de mulheres e o número de convidados.

$$75:100 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

(de cada 4 convidados, 3 eram mulheres).

e- Na sala da 6ª série de uma escola há 25 rapazes e 20 moças. Encontre a razão entre o número de rapazes e moças.

$$\frac{25:5}{20:5} = \frac{5}{4}$$ (indica que para 5 moças existem 4 rapazes).

f- Em um jogo de basquete, a equipe de João e de Antônio marcou 70 pontos, dos quais João marcou 10 pontos e Antônio marcou 15. Com base nessas informações determine

i) a razão entre o número de pontos marcados por João e o número de pontos marcados por Antônio.

$$\frac{10}{15} \text{ simplificando } \frac{2}{3}$$

ii) razão entre o número de pontos marcados por João e o número de pontos marcados pela equipe.

$$\frac{10}{70} \text{ simplificando } \frac{1}{7}$$

3- Aplicações do Conceito de Razão

Escala. Ao compararmos mapas com os lugares a serem representados por eles, representamos as distâncias em *escala* menor que a real. O conceito é dado pela seguinte razão:

$$\text{Escala} = \frac{\text{medida do comprimento no desenho}}{\text{medida do comprimento real}}$$ (ambas na mesma unidade de medida)

Exemplos:

a) A escala da planta de um terreno na qual o comprimento de 60 metros foi representado por um segmento de 3 cm é

A) 1 : 10.000
B) 1 : 2.000
C) 1 : 3.000
D) 1 : 6.000
E) 1 : 4.000

Solução

Inicialmente, transformamos 60 m para centímetros, para trabalharmos na mesma unidade de medida.

$60\ m = 60 \cdot 100\ cm = 6000\ cm$

Portanto,

$$\text{Escala} = \frac{3\text{ cm}}{6000\text{ cm}} = \frac{1}{2000} = 1{:}\,2000 \;\; \rightarrow \;\; \text{Letra B}$$

b) Na planta de um edifício que está sendo construído, cuja escala é de 1 : 50, as dimensões de uma sala retangular são 10 cm e 8 cm. Calcule a área real da sala projetada.

Solução:

8 cm = 8. 50 = 400 cm = 4m

10 cm = 10 . 50 = 500 cm = 5 m

Área = 4m x 5m = 20 m²

Velocidade Média. É a razão entre a distância percorrida e o tempo total de percurso. A velocidade média será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para calcular distância e tempo. Alguns exemplos de unidades para a velocidade média são km/h, m/s, cm/s, etc.

$$V\text{elocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo total do percurso}}$$

Exemplos:

a) A distância entre as cidades do Rio de Janeiro e São Paulo é de, aproximadamente, 400 km. Um carro levou 5 horas para percorrer esse trajeto. Determine sua velocidade média.

Solução:

$$Velocidade\ média = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ total\ do\ percurso} = \frac{400\ km}{5\ h} = 80\ km/h$$

Obs.: O significado desse valor é que a cada hora o carro percorreu, aproximadamente, 80 km.

b) Pedro percorreu 560 km em 8 horas, viajando com o seu caminhão. Qual foi a velocidade média com que ele fez esse percurso?

$$Velocidade\ média = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ total\ do\ percurso} = \frac{560\ km}{8\ h} = 70\ km/h$$

Densidade. A densidade de um corpo é a razão entre a sua massa e o seu volume. A densidade também será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para medir a massa e o volume. Alguns exemplos de unidades para a densidades são g/cm³, kg/m³, etc.

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{\text{m}}{\text{v}}$$

Exemplos:

a) Uma quantidade de óleo de cozinha ocupava completamente uma jarra com 1 litro de volume. Sabe-se que a densidade do óleo é de, aproximadamente, 0,86 g/cm³. Determine a massa do óleo, em gramas.

Solução:

Como a densidade é dada em g/cm³, isso significa que o volume deve ser dado em cm³. Assim, fazendo a conversão, 1l = 1 dm³ = 1000 cm³.

Daí,

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{\text{m}}{\text{v}} \Leftrightarrow 0{,}86 = \frac{\text{m}}{1000} \Leftrightarrow \text{m} = 0{,}86 \text{ x } 1000 = 860 \text{ g}$$

Portanto, a massa de óleo contida na jarra é de 860 g.

b) Sabendo que uma placa de chumbo com volume de 0,001 d m³ tem massa de 11,3 g, qual é a densidade do chumbo?

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{\text{m}}{\text{v}} \Leftrightarrow \text{d} = \frac{11{,}3\ g}{0{,}001\ dm^3} = 11300\ \ g/dm^3$$

Densidade Demográfica. Esta razão é dada pela relação do número de habitantes (População) e a área ocupada.

$$\boldsymbol{Dd} = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}}$$

Exemplos:

a) O estado de Goiás, no censo de 2014, teve a sua população avaliada em 6.523.222 habitantes. A sua área é de aproximadamente 340.111,376 Km^2. Determine a densidade demográfica dessa região e diga o que significa essa razão.

$$\text{Dd} = \frac{\text{P}}{\text{A}} = \frac{6.523.222}{340.111{,}376} \cong 19{,}18\ hab/km^2$$

Obs.: Com este resultado entende-se que, em um quilômetro quadrado, há 19 habitantes.

b) Determine a densidade demográfica de uma cidade que possui 13.834. 971 habitantes, e que ocupa uma área de 564.692 km². A densidade demográfica é calculada através da divisão entre número de habitantes e área em km².

$$\mathrm{Dd} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}} = \frac{13834971}{564692} \cong 24{,}5\ \mathrm{hab/km^2}$$

4- Proporção

É a igualdade entre duas razões.

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$$

Também pode ser escrito da seguinte forma.

a : b :: c : d

a, b, c,d são números reais com *b e d* diferentes de zero.

Lê – se: a está para b assim como c está para d.

O antecedente da primeira razão (a) e o consequente da segunda (d) são chamados de extremos, enquanto o consequente da primeira razão (b) e o antecedente da segunda razão (c) são chamados de meios. Os nomes são sugestivos quando consideramos a segunda forma de expressar a proporção (a : b :: c : d).

Propriedade fundamental da proporção

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos. O que denotamos por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \mathrm{b.c} = \mathrm{a.d}$$

Pela comutatividade do produto, pode-se escrever a mesma proporção de várias maneiras.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Outras Propriedades das Proporções

1ª) Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 1º (ou 2º) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 3º (ou 4º).

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\ ou\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$$

2ª) Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 1º (ou 2º) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 3º (ou 4º).

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}\ ou\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$$

3ª) Numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a+b}{b+d}=\frac{a}{b}\ ou\ \frac{a+b}{b+d}=\frac{c}{d}}$$

4ª) Numa proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a-b}{b-d}=\frac{a}{b}\ ou\ \frac{a-b}{b-d}=\frac{c}{d}}$$

5ª) Numa proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a.c}{b.d}=\frac{a^2}{b^2}\ ou\ \frac{a.c}{b.d}=\frac{c^2}{d^2}}$$

Obs.: A última propriedade pode ser estendida para qualquer número de razões.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a.c.e}{b.d.f}=\frac{a^3}{b^3} ou\ \frac{a.c.e}{b.d.f}=\frac{c^3}{d^3}\ ou\ \frac{a.c.e}{b.d.f}=\frac{e^3}{f^3}}$$

Exemplos:

a) Em uma sala de aula, a razão de moças para o número de rapazes é de 5/4. Se o número total de alunos desta turma é de 45 pessoas, caso exista uma festa quantas moças ficariam sem par?

A) 3 moças B) 4 moças C) 5 moças D)6 moças E) 7 moças

Solução:

Primeiro vamos denominar o número de moças por **X**, e o número de rapazes por **Y**.

$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$ Igualam – se as razões

x + y = 45 (Soma total de alunos)

$\frac{x+y}{x} = \frac{5+4}{5}$ Aplicação de propriedade das proporções

$\frac{45}{x} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \mathbf{9\,x = 45\,.\,5} \Leftrightarrow \mathbf{9x = 225} \Leftrightarrow \mathbf{x} = 25$ moças

x + y = 45 $\Leftrightarrow \mathbf{25 + y = 45} \Leftrightarrow \mathbf{y} = 20$ rapazes

25 – 20 = 5 moças ficariam sem par. Letra C.

b) Uma fotografia tem 10 cm de largura e 15 cm de comprimento. Queremos ampliá-la de modo que seu comprimento tenha 18 cm. Então, na foto maior, a largura medirá

A) 12 cm B) 13 cm C) 14 cm D) 16 E) n d a

$$\frac{15}{10} = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = 12 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1-Numa turma de 40 meninas e 10 meninos, qual é a razão entre o número de meninas e o total da turma?

2- Determine o valor de x na proporção $\frac{12}{48} = \frac{16}{x}$

3- Determine o valor de x e y em cada item:

a) $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x}{15} = \frac{4}{y} = \frac{2}{3}$

4) A razão das idades de duas pessoas é 2/3. Achar estas idades sabendo que sua soma é 35 anos.

Respostas:

1- $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
2- 64
3- a) x=2 e y = 3 b) x = 10 e y = 6
4- 14 e 21 anos

CAPÍTULO 2 – GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DIVISÃO PROPORCIONAL

1- Introdução

No dia a dia lidamos com situações que envolvem números, salário, dias de trabalho, índice de inflação, velocidade, tempo, idade, etc. que serão tratadas como grandezas.

Cada grandeza não é independente, mas vinculada a outra conveniente. Por exemplo, o salário está relacionado aos dias de trabalho. A quantidade de combustível gasto por um automóvel depende do número de quilômetros percorridos.

A relação entre duas grandezas variáveis estabelece a lei de variação dos valores de uma delas em relação à outra. Segundo tal lei, as grandezas relacionadas podem ser direta ou inversamente proporcionais.

2- Proporção direta

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra aumenta (ou diminui) nessa mesma razão.

Grandezas como trabalho produzido e remuneração obtida são geralmente diretamente proporcionais. De fato, se você receber R$ 1,00 para cada folha que digitar, sabe que deverá receber R$ 10,00 por 10 folhas digitadas.

Podemos destacar outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais.

a) Velocidade média e distância percorrida, pois dobrando a velocidade dobra-se a distância percorrida.

b) Área e preço de terrenos, pois aumentando a área de um terreno, também aumenta-se seu preço.

c) Altura de um objeto e comprimento da sombra projetada por ele, pois quanto maior é um objeto, maior é a sombra projetada por ele.

Exercícios Resolvidos

a) Uma costureira gasta 1,40 metros de tecido na confecção de uma bermuda. Caso ela queira confeccionar cinco bermudas, quantos metros de tecido serão gastos? Solução:

A situação é um típico problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais. A costureira irá gastar 7 metros de tecido, pois 1,40 x 5 = 7. À medida que o número de bermudas aumenta, a quantidade de tecido aumenta de forma diretamente proporcional.

Observação: Duas grandezas variáveis são diretamente proporcionais (ou simplesmente proporcionais) se os valores correspondentes x e y são expressos por uma função do tipo : $y = k.x$, em que k é um número real constante, diferente de zero.

b) Um automóvel percorre 300 km com 25 litros de combustível. Caso o proprietário desse automóvel queira percorrer 120 km, quantos litros de combustível serão gastos?

Solução:

Vamos estabelecer uma ordem de raciocínio lógico calculando quantos quilômetros este veículo percorre com exatamente 1 litro de combustível. Para isso basta dividirmos 300 por 25, que resulta em 12 km por litro. Agora basta dividir 120 km por 12 km, resultando em 10 litros, que é a quantidade de combustível necessária para percorrer 120 km.

c) Em uma gráfica, certa impressora imprime 100 folhas em 5 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 1000 folhas?

Solução:
A tabela abaixo pode ser construída para relacionar as grandezas folhas e minutos, ajudando na resolução.

Folhas	Minutos
100	5
x10	***x10***
1000	50

De acordo com a tabela percebe-se que o tempo gasto para imprimir 1000 folhas é de 50 minutos, pois ao se multiplicar o número de folhas por 10 deve-se multiplicar o tempo por 10. Isso acontece porque as grandezas são diretamente proporcionais.

d) Verifique se são diretamente proporcionais as sequências de números (6,9,12,15) e (2,3,4,5).

Solução:

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$$

Logo, essas sequências são diretamente proporcionais e a razão de proporcionalidade é 3.

2.1- **Propriedade característica**

Sendo (x_1, y_1) e (x_2,y_2) pares de valores correspondentes de duas grandezas proporcionais, pode-se escrever:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$$

Alternando os extremos, obtém-se:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

que nos dá a propriedade característica das grandezas diretamente proporcionais.

Dadas duas grandezas diretamente proporcionais, a razão entre dois valores de uma delas é igual à razão entre dois valores correspondentes da outra.

Notas:

- ✓ A proporcionalidade entre duas grandezas, quando resultante de uma dedução lógica ou de uma definição, só existe dentro de certos limites. Assim, na compra por atacado, por exemplo, o preço por unidade é menor do que nas compras a varejo.
- ✓ Para se caracterizar a proporcionalidade de duas grandezas não é suficiente verificar se o aumento de uma delas acarreta o aumento da outra. É necessário que, ao se multiplicar uma delas por um número real k diferente

de zero, a grandeza correspondente também fique multiplicada por k. Por exemplo, o lado de um quadrado e a sua área não são grandezas proporcionais, pois ao se multiplicar o lado por 2, a área fica multiplicada por 4.

3-Proporção inversa

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra diminui (ou aumenta) na mesma razão.

Grandezas como tempo de trabalho e o número de operários para a mesma tarefa são, em geral, inversamente proporcionais. De fato, para uma tarefa que 10 operários executa em 20 dias, espera-se que 5 operários realize em 40 dias.

Veja outros exemplos de grandezas inversamente proporcionais:

a) Velocidade média e o tempo de viagem, pois se você dobrar a velocidade com que anda, mantendo fixa a distância a ser percorrida, reduzirá o tempo do percurso pela metade.

b) Número de torneiras de mesma vazão e o tempo para encher um tanque, pois quanto mais torneiras estiverem abertas, menor será o tempo para completar o tanque.

Exercícios Resolvidos

a) Com 8 eletricistas podemos fazer a instalação de uma casa em três dias. Quantos dias levarão 6 eletricistas para fazer o mesmo trabalho?

Solução:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{x} \iff \mathrm{x} = 4$$

Resposta: 4 dias.

b) Com seis pedreiros pode-se construir um muro em 8 dias. Quantos dias gastarão 3 pedreiros para fazer o mesmo muro?

Solução:

$$\frac{3}{6} = \frac{8}{x} \iff \mathrm{x} = 16$$

Resposta: 16 dias.

c) Verifique se são ou não inversamente proporcionais as sequências de números.

i) (2,3,6,10) e (45,30,15,9)

Solução:
Tem-se que: 2x45 = 3x30 = 6x15 = 10x9 = 90
Logo, são inversamente proporcionais e o fator de proporcionalidade é 90.

ii) (2,5,8) e (40,30,20)

Solução:
Tem-se que 2x40 ≠ 5x30
Logo, não são inversamente proporcionais.

d) Determine os valores de a e b nas sequências de números inversamente proporcionais (2,3,b) e (15,a,5).

Solução:

Tem-se que: k = 2x15 = 30

Daí:

3. a = 30 → a = 10

5. b = 30 → b = 6

Logo: a = 10 e b = 6.

Observação: Duas grandezas variáveis são inversamente proporcionais se os valores correspondentes x e y são expressos por uma função do tipo: y = k. 1/ x, em que k é um número real constante, diferente de zero.

3.1- **Propriedade característica**

Sendo (x_1, y_1) e (x_2,y_2) pares de valores correspondentes de duas grandezas inversamente proporcionais, pode-se escrever: $x_1y_1 = x_2y_2$ ou

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

que nos dá a propriedade característica das grandezas inversamente proporcionais.

Dadas duas grandezas inversamente proporcionais, a razão entre dois valores de uma delas é igual ao inverso da razão entre os dois valores correspondentes da outra.

4- Divisão em partes proporcionais

a) Diretamente proporcional

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a outros números dados é encontrar partes desse número que são diretamente proporcionais a esses números dados.

Exemplos:

i) João possui três filhos: Ana, Thiago e Jorge. Ao falecer, João deixou R$ 1.500.000,00 de herança para seus filhos. O dinheiro deverá ser dividido de forma diretamente proporcional à idade de cada filho. Determine quanto cada um receberá, sabendo que Ana está com 17, Thiago com 20 e Jorge com 23 anos.

Solução:

Para facilitar os cálculos, identifica-se Ana por **A**, Thiago por **T** e Jorge por **J**. Sabendo que a divisão será diretamente proporcional à idade de cada um, tem-se:

$$\mathbf{\frac{A}{17} + \frac{T}{20} + \frac{J}{23} = \frac{A + T + J}{17 + 20 + 23} = \frac{1500000}{60} = 25000}$$

Depois de a razão dessa divisão proporcional, deve-se igualá-la ao quociente do valor recebido por cada irmão e sua idade.

Para Ana, tem-se:

$$\mathbf{\frac{A}{17} = 25000}$$

A = 25000 . 17

A = 425000

Para Thiago, tem-se:

$$\mathbf{\frac{T}{20} = 25000}$$

T = 25000 . 20

T = 500000

E para Jorge, tem-se:

$$\mathbf{\frac{J}{23} = 25000}$$

A = 25000 . 23

A = 575000

Resposta: Ana receberá R$ 425.000,00 de herança de seu pai, Thiago receberá R$ 500.000,00 e Jorge, R$ 575.000,00.

ii) Um supermercado solicita mercadorias à fábrica de acordo com a quantidade de produtos do estoque que foi vendida. O entregador da fábrica transporta apenas 350 pacotes por vez, e as entregas são feitas de forma diretamente proporcional à quantidade de produtos que acabou no estoque. Sabendo que em um dia esgotaram-se 20 pacotes de um produto A, 35 pacotes de um produto B e 15 pacotes de um produto C, quantos produtos de cada o entregador deverá levar ao supermercado?

Solução:

A quantidade de produtos A, B e C esgotada refere-se a grandezas diretamente proporcionais àquelas que serão entregues.

$$\mathbf{\frac{A}{20} + \frac{B}{35} + \frac{C}{15} = \frac{A + B + C}{20 + 35 + 15} = \frac{350}{70} = 5}$$

Tendo conhecimento da razão dessa divisão proporcional, pode-se descobrir quanto será entregue de cada produto:

$$\mathbf{\frac{A}{20} = 5} \qquad \mathbf{\frac{B}{35} = 5} \qquad \mathbf{\frac{C}{15} = 5}$$

$$\mathbf{A = 20 \,.\, 5} \qquad \mathbf{B = 35 \,.\, 5} \qquad \mathbf{C = 15 \,.\, 5}$$

$$\mathbf{A = 100} \qquad \mathbf{B = 175} \qquad \mathbf{C = 75}$$

Resposta: O entregador levará para o supermercado 100 pacotes do produto A, 175 pacotes de B e 75 pacotes de C.

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a A, B, C,... é encontrar números x, y, z,... tais que:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = k$$

iii) Para dividir o número 144 em partes diretamente proporcionais a 2, 4 e 6 é preciso encontrar números x, y e z, tais que:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = k$ e sabemos que $x + y + z = 144$, daí:

Temos que: $x = 2k$, $y = 4k$ e $z = 6k$ podemos então concluir que:

$2k + 4k + 6k = 144$

$12k = 144$

$k = 12$

Resposta: Concluímos então que: $x = 24$, $y = 48$ e $z = 72$

iv)Um homem ao fazer um testamento decide dividir sua fortuna, que é de R$ 3.000.000,00, entre seus três filhos, proporcionalmente às suas idades, que são: 3 anos, 4 anos e 5 anos. Quanto receberá cada um?

Resposta

Considerando x, y e z as idades dos três filhos, aplicando a definição, temos:

$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$ e sabemos que $x + y + z = 3.000.000$, daí:

$x = 3k$

$y = 4k$

$z = 5k$

Substituindo temos:

$3k + 4k + 5k = 3.000.000$

$12k = 3.000.000$

$k = \frac{3.000.000}{12}$

$k=250.000$

Então temos:

$\frac{x}{3} = 250.000 \Rightarrow x = 750.000$

$\frac{y}{4} = 250.000 \Rightarrow y = 1.000.000$

$\frac{z}{5} = 250.000 \Rightarrow z = 1.250.000$

A resposta correta é: Os filhos receberão, respectivamente, R$ 750.000,00, R$ 1.000.000,00 e R$ 1.250.000,00.

v) Suponhamos que Antônio, José e Pedro tenham se associado para comprar um terreno no valor de R$ 60 000,00. Antônio entrou com R$ 30 000,00, José com R$ 20 000,00 e Pedro com R$ 10 000,00. Algum tempo depois, venderam o terreno por R$ 90 000,00. Qual a parte que cabe a cada um deles?

Solução:

Por convenção, a cada real empregado na compra do terreno deve corresponder a mesma quantia resultante da venda, isto é, um quota. Essa quota corresponde à razão entre o preço de venda e o preço de compra, ou seja:

$$\frac{90000}{60000} = 1{,}5$$

Assim, os três sócios irão receber as seguintes quantias:

Antônio: 30 000 x 1,5 = R$ 45 000,00

José: 20 000 x 1,5 = R$ 30 000,00

Pedro: 10 000 x 1,5 = R$ 15 000,00

Se escrevermos as razões entre as quantias recebidas e empregadas individualmente, obtemos:

$$\frac{45000}{30000} = \frac{30000}{20000} = \frac{15000}{10000} = 1{,}5$$

A igualdade entre essas razões mostra que as quantias que os sócios receberam na venda são números proporcionais às quantias empregadas na compra do terreno. Desse modo pode-se dizer que o produto da venda foi dividido em três partes proporcionais às partes da compra.

Assim;

Dividir um número em partes proporcionais a vários outros números dados é decompô-lo em parcelas proporcionais a esses números.

vi) Dividir o número 180 em três partes diretamente proporcionais a 2, 5 e 11.
Obs.: Isso significa dividir o número em três parcelas, tais que a razão da primeira parcela para o número 2 seja igual à razão da segunda para o número 5 e igual a da terceira para o número 11.
Solução:
Assim chamamos de x, y e z, respectivamente, cada uma das parcelas. Ou seja:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

Além disso, como x, y e z são as parcelas em que dividimos o número 180, devemos ter:

$$x + y + z = 180$$

Utilizando a propriedade da proporção que diz : **em uma série de razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como qualquer antecedente está para o seu respectivo consequente ,** então :

$$\frac{x+y+z}{2+5+11} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

ou,

$$\frac{180}{18} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$ **, como**

$$\frac{180}{18} = 10$$ **, então**

$$\frac{x}{2} = 10 \Rightarrow x = 2x10 = 20$$

$$\frac{y}{5} = 10 \Rightarrow y = 5x10 = 50$$

$$\frac{z}{11} = 10 \Rightarrow z = 11x10 = 110$$

Sendo 20 + 50 + 110 = 180, concluímos que as partes procuradas são : 20, 50 e 110.

b) Inversamente proporcional

Dividir um número em partes inversamente proporcionais a outros números dados é encontrar partes desse número que são diretamente proporcionais aos inversos desses números dados.

Exemplos:

i) Dividir o número 130 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 6

Solução:

$$a+b+c=130 \qquad \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} \qquad \frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{130}{\frac{26}{30}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a \cdot \frac{26}{30} = \frac{1}{2} \cdot 130 \Rightarrow a = 65 \cdot \frac{30}{26} \Rightarrow a = 75$$

$$\frac{130}{\frac{26}{30}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} \Rightarrow b \cdot \frac{26}{30} = \frac{1}{5} \cdot 130 \Rightarrow b = 26 \cdot \frac{30}{26} \Rightarrow b = 30$$

$$\frac{130}{\frac{26}{30}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} \Rightarrow c \cdot \frac{26}{30} = \frac{1}{6} \cdot 130 \Rightarrow \mathrm{c} = \frac{130}{6} \cdot \frac{30}{26} \Rightarrow c = 25$$

Solução por dicas e macetes

130 corresponde a uma soma de 3 partes ou seja: $a+b+c=130$

Somamos os inversos dos números por se tratar de divisão inversamente proporcional

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{15+6+5}{30} = \frac{26}{30}$ Eliminando-se os denominadores, teremos duas somas, ou seja: 130 e 26.

Dividindo-se uma soma pela outra teremos: $130 \div 26 = 5$

Multiplicando-se 5 pelos valores do enunciado, encontramos a resposta:

$5 \cdot 15 = 75 \qquad 5 \cdot 6 = 30 \qquad 5 \cdot 5 = 25$

De maneira geral, para dividir um número *n* em **partes inversamente proporcionais** a *a*, *b*, *c* etc, utilizamos uma constante de proporção *k* e o modelo *y=k/x* para grandezas inversamente proporcionais.

Primeira parte: *k/a*

Segunda parte: *k/b*

Terceira parte: *k/c*

etc

Para calcular o k e, depois, cada uma das partes, resolvemos a seguinte equação:

k/a+k/b+k/c+…=n

ii) Dividir o número 140 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 10.

$$\boldsymbol{Primeira\ parte}: \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{Segunda\ parte}: \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{Terceira\ parte}: \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{10}}$$

$$\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{10}} = \mathbf{140} \rightarrow \frac{\mathbf{15}\boldsymbol{k} + \mathbf{10}\boldsymbol{k} + \mathbf{3}\boldsymbol{k}}{\mathbf{30}} = \frac{\mathbf{4200}}{\mathbf{30}} \rightarrow \mathbf{28}\,\boldsymbol{k} = \mathbf{4200} \rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{150}$$

Agora, conhecendo o k, substituímos nas partes:

$$\boldsymbol{Primeira\ parte}: \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{150}}{\mathbf{2}} = \mathbf{75}$$

$$\boldsymbol{Segunda\ parte}: \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{150}}{\mathbf{3}} = \mathbf{50}$$

$$\boldsymbol{Terceira\ parte}: \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{150}}{\mathbf{10}} = \mathbf{15}$$

iii) Dividir o número 210 em partes inversamente proporcionais a 3, 5 e 6. Obs.: Isso implica em dividir o número proporcionalmente aos inversos de 3, 5 e 6, ou seja,

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}$$, como o m.m.c (3,5,6)= 30, tem-se:

$$\frac{1}{3}x30 = 10 \qquad \frac{1}{5}x30 = 6 \qquad \frac{1}{6}x30 = 5$$

Desse modo : $\begin{cases} \dfrac{x}{10} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{5} \\ x + y + z = 210 \end{cases}$, como 10+6+5= 21 e $\dfrac{210}{21} = 10$, então :

x = 10 x 10= 100
y = 6 x 10 = 60
z= 5x 10 = 50, logo as partes são 100, 60 e 50.

c) Divisão proporcional composta

O problema consiste em dividir um número **n** em partes direta ou inversamente proporcionais a certos números a, b, c, simultaneamente a outros tantos números d , e , f. Segundo a propriedade da proporção, se as partes x, y e z são proporcionais a **a, b e c e** também a **d, e, f** , então são também proporcionais aos produtos: **a.d, b.e , c.f.** Então:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a.d} = \dfrac{y}{b.e} = \dfrac{z}{c.f} \\ x + y + z = n \end{cases}$$

A divisão do número **N** em partes $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, ..., $\mathbf{p_n}$ diretamente proporcionais aos números reais, diferentes de zero $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{a_n}$ respectivamente e inversamente proporcionais aos números reais, diferentes de zero $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, ..., $\mathbf{b_n}$ respectivamente, baseia-se em encontrar a constante **K**, real não nula, tal que:

$\mathbf{p_1 = K . a_1 . {}^1/_{b1}}$

$\mathbf{p_2 = K . a_2 . {}^1/_{b2}}$

$\mathbf{p_3 = K . a_3 . {}^1/_{b3}}$

....

$\mathbf{p_n = K . a_n . {}^1/_{bn}}$

$\mathbf{N = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$

Ou de forma mais simplificada:

$\mathbf{p_1 = K . {}^{a}{}_1/_{b1}}$

$\mathbf{p_2 = K . {}^{a}{}_2/_{b2}}$

$p_3 = K \cdot {}^{a}{}_{3}/_{b3}$

....

$p_n = K \cdot a_n /_{bn}$

$N = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n$

Depois de encontrado o valor da constante **K**, basta substituí-lo nas igualdades em que foi utilizada e realizar as contas para identificar o valor de cada uma das partes.

Exercícios resolvidos:

a)Divida 392 em partes ao mesmo tempo proporcionais a 2, 3 e 4 e a 3, 5 e 7.

Solução:

Tem-se: 2 x 3 =6 3 x 5 = 15 4 x 7 = 28, somando os três resultados obtém-se: 6 + 15 + 28 = 49.

Fazendo :

$$\frac{392}{49} = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 6x8 = 48 \\ y = 15x8 = 120 \\ z = 28x8 = 224 \end{cases}$$, logo, as partes procuradas são 48,120 e 224.

b) Divida o número 981 em partes diretamente proporcionais a 2, 6 e 3 e inversamente proporcionais a 5, 9 e 4, respectivamente.

Do enunciado tiramos que:

- **$p_1 = K \cdot {}^{2}/_{5}$**
- **$p_2 = K \cdot {}^{6}/_{9}$**
- **$p_3 = K \cdot {}^{3}/_{4}$**
- **$p_1 + p_2 + p_3 = 981$**

Para encontrarmos o valor da constante **K** devemos substituir o valor de **p_1**, **p_2** e **p_3** na última expressão. Portanto:

- **$p_1 = 540 \cdot {}^{2}/_{5} = 216$**
- **$p_2 = 540 \cdot {}^{6}/_{9} = 360$**
- **$p_3 = 540 \cdot {}^{3}/_{4} = 405$**

Resposta: As parcelas procuradas são respectivamente 216, 360 e 405.

c) Divida o número 1228 em partes diretamente proporcionais a 1, 2, 3 e 4 e inversamente proporcionais a 5, 6, 7 e 8, respectivamente.

Solução:

Conforme o explicado sabemos que:

- $\mathbf{p_1 = K \cdot {}^{1}/_{5}}$
- $\mathbf{p_2 = K \cdot {}^{2}/_{6}}$
- $\mathbf{p_3 = K \cdot {}^{3}/_{7}}$
- $\mathbf{p_4 = K \cdot {}^{4}/_{8}}$
- $\mathbf{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1228}$

Para encontrarmos o valor da constante **K** devemos substituir o valor de $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$ e $\mathbf{p_4}$ na última igualdade:

Logo:

- $\mathbf{p_1 = 840 \cdot {}^{1}/_{5} = 168}$
- $\mathbf{p_2 = 840 \cdot {}^{2}/_{6} = 280}$
- $\mathbf{p_3 = 840 \cdot {}^{3}/_{7} = 360}$
- $\mathbf{p_4 = 840 \cdot {}^{4}/_{8} = 420}$

Resposta: As partes procuradas são respectivamente 168, 280, 360 e 420.

CAPÍTULO 3 – MÉDIAS ARITMÉTICAS

1- Introdução

A média aritmética é uma das médias mais utilizadas no nosso dia a dia. Ela se dá pelo resultado da divisão da soma dos números dados pela quantidade de números somados.

Esse tipo de cálculo é muito utilizado em campeonatos de futebol, no intuito de determinar a **média** de gols da rodada; nas escolas, para o cálculo da **média final** dos alunos; nas pesquisas estatísticas, pois a média dos resultados determina o direcionamento das ideias expressas pelas pessoas pesquisadas, etc.

2-Média Aritmética Simples

A média aritmética simples também é conhecida apenas por média. Ela resulta da divisão entre a soma dos números de uma lista e a quantidade de números somados. A **média aritmética** é considerada uma medida de tendência central, pois focaliza valores médios dentre os maiores e menores e é muito utilizada no cotidiano. Surge do resultado da divisão do somatório dos números dados pela quantidade de números somados.

Exemplos:

a) Calcule a **média** anual de Carlos na disciplina de Matemática com base nas seguintes notas bimestrais: 1ºB = 6,0   2ºB = 9,0   3ºB = 7,0   4ºB = 5,0.

Solução:

Ma = (6,0 + 9,0 + 7,0 + 5,0) / 4

Ma = 27/4

Ma = 6,75

A média anual de Carlos foi 6,75.

b) Determinar a **média** dos números 3, 12, 23, 15, 2.

Solução:

Ma = (3+12+23+15+2) / 5

Ma = 55 / 5

Ma = 11

A **média** dos números é igual a 11.

c) A média aritmética de dois números é 50. Um dos números é 35. Qual é o outro número?

Solução:

$$\frac{35+x}{2} = 50 \rightarrow 35 + x = 100 \rightarrow x = 65$$

d) A média aritmética de cinco números é 13. Quatro desses números são 7, 9, 11 e 14. Qual é o quinto número.

Solução:

$$\frac{7+9+11+14+x}{5} = 13 \rightarrow \frac{41+x}{5} = 13 \rightarrow 41 + x = 65 \rightarrow x = 24$$

e) A média aritmética de um conjunto de 12 números é 9. Se os números 10,15 e 20 foram retirados do conjunto, a média aritmética dos restantes é.....

Solução:

12 x 9 = 108 → 108 – (10 + 15 + 20) = 63

$$Média = \frac{63}{9} = 7$$

f) A média aritmética de 50 números é 38. Se dois dos números, 45 e 55, são suprimidos a média aritmética passa a ser........

Solução:

50 x 38 = 1900 →1900 – (45 + 55) = 1800

$$Média = \frac{1800}{48} = 37{,}5$$

3-Média Aritmética Ponderada

A média aritmética ponderada de dois ou mais números é o quociente da soma dos produtos desses números pela soma dos respectivos pesos.

Exemplos:

a)Um colégio resolveu inovar a forma de calcular a média final de seu alunos.

1 bimestre teve peso 2.
2 bimestre teve peso 2.
3° bimestre teve peso 3.
4° bimestre teve peso 3.

Vamos calcular a média anual de Ricardo que obteve as seguintes notas em historia. 1° bim = 3, 2° bim = 2,5, 3° bim = 3,5 e 4° bim = 3

$$Mp = \frac{2x3+2x2{,}5+3x3{,}5+3x3}{2+2+3+3}$$

$$Mp = \frac{6+5+10{,}5+9}{10}$$

$$Mp = \frac{30{,}5}{10} = 30{,}5$$

Obs.: Este tipo de média é muito usada nos vestibulares, você já deve ter ouvido algum colega falar assim, a prova de matemática para quem faz engenharia é peso 3 e historia é peso 1, isto é devido a engenharia ser um curso ligado a ciências exatas. Este peso varia de acordo com a área de atuação do curso.

b) Uma empresa é constituída de 40 funcionários, sendo os seus salários representados pela tabela a seguir.

Número de Funcionários	Salário (R$)
20	465
15	930
5	1395

Qual o salário médio dos funcionários dessa empresa?
Solução:
Vamos calcular o valor de cada faixa salarial:

20 x 465 = 9.300
15 x 930 = 13.950
5 x 1395 = 6.975
Total = 9.300 + 13.950 + 6.975 = 30.225

Os 40 funcionários da empresa geram um custo de R$ 30.225. Para sabermos o salário médio da empresa devemos dividir o valor da folha salarial pelo número de funcionários: 30225 / 40 = 755,62.

$$Média\_salarial = \frac{\sum salários}{número\_de\_funcionários}$$
$$\left(\sum = somatório\right)$$

c) Em uma cidade foi realizada uma entrevista com os usuários do transporte coletivo a fim de avaliar o nível de satisfação. Foram entrevistadas 1000 pessoas e os dados foram organizados em uma tabela. Com base nos dados, determine a nota que representa a média geral de satisfação dos usuários do transporte coletivo da cidade.

Notas	Número de Entrevistados
0	10
1	12
2	25
3	35
4	150
5	340
6	170
7	136
8	80
9	40
10	2
Total	1000

Solução:

Média = (0x10 + 1x12+ 2x25 + 3x35 + 4x150 + 5x340 + 6x170 + 7x136 + 8x80 + 9x40 + 10x2) / 1000

Média = (0 + 12 + 50 + 105 + 600 + 1700 + 1020 + 952 + 640 + 360 + 20) / 1000

Média = 5459 / 1000

Média = 5,5

d) Antônio participou de um concurso, no qual foram realizadas provas de Português, Matemática, Biologia e História. Essas provas tinham peso **3**, **3**, **2** e **2**, respectivamente. Sabendo que Antônio tirou 8,0 em Português, 7,5 em Matemática, 5,0 em Biologia e 4,0 em História, qual foi a média que ele obteve?

Solução:

$$Média = \frac{8{,}0x3 + 7{,}5x3 + 5{,}0x2 + 4{,}0x2}{3 + 3 + 2 + 2} = \frac{64{,}5}{10} = 6{,}45$$

Resposta: A média de Antônio foi de 6,45.

e) Uma empresa de comunicação conta com duas categorias de funcionários: Telemarketing e diretoria. Os funcionários da primeira categoria recebem R$ 950,00 mensalmente, enquanto os da segunda recebem R$ 9500,00. Sabendo que essa empresa possui 63 funcionários no setor de telemarketing e 5 diretores, o salário médio pago a eles é de, aproximadamente

A) R$ 5985,00 B) R$ 4750,00 C) R$ 1580,00 D) R$ 950,00 E) R$ 9500

Solução:

Essa questão, na realidade, deveria ser resolvida com média aritmética. Contudo, para descartar a necessidade de somar 63 parcelas de 950, podemos usar multiplicação ou nos valermos do conceito de média ponderada.

$$M = \frac{63 \cdot 950 + 5 \cdot 9500}{63 + 5}$$

$$M = \frac{59850 + 47500}{68}$$

$$M = \frac{107350}{68}$$

$$M = 1578{,}68$$

Gabarito: **Letra C.**

f) Em uma classe com 30 rapazes e 20 moças, foi realizada uma prova: a média dos rapazes foi 7,0 e a das moças 8,0. A m
A)7,4 B)7,5 C) 7,6 D)7,2 E)nda

Solução:
$Média = \frac{30x7,0+20x8,0}{30+20} = \frac{370}{50} = 7,4$ Resposta: Letra A

g) Comprei 5 doces a R$1,80 cada um, 3 doces a R$ 1,50 cada e 2 doces a R$ 2,50 cada. O preço médio, por doce, foi
A) R$1,75 B) R$1,85 C) R$1,93 D) R$2,00 E) nda
Solução:

$Média = \frac{5x1,80+3x1,50+2x2,50}{5+3+2} = \frac{18,5}{10} = 1,85$ Resposta: Letra B.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1- Calcule a **média** anual de João na disciplina de Matemática com base nas seguintes notas bimestrais:

1ºB = 6,0 2ºB = 9,0 3ºB = 7,0 4ºB = 5,0

Resposta: 6,75

2- Em uma empresa existem cinco faixas salariais divididas de acordo com a tabela a seguir:

Grupos	Salário
A	R$ 1.500,00
B	R$ 1.200,00
C	R$ 1.000,00
D	R$ 800,00
E	R$ 500,00

Determine a média de salários da empresa.

Resposta: R$1000,00.

3- Paulo participou de um concurso, onde foram realizadas provas de Português, Matemática, Biologia e História. Essas provas tinham peso **3**, **3**, **2** e **2**, respectivamente. Sabendo que Paulo tirou 8,0 em Português, 6,0 em Matemática, 7,0 em Biologia e 3,0 em História, qual foi a média que ele obteve?

Resposta: 6,2

4- Em uma sequência de 8 jogos amistosos, o time A obteve os seguintes resultados: 4x2, 3x0, 4x2, 0x1, 2x2, 3x0, 4x4, 2x0. Qual a média de gols marcados pelo time A nesses jogos amistosos? E a média de gols sofridos?

Respostas: 2,75 gols e 1,37 gols.

CAPÍTULO 4 – REGRA DE SOCIEDADE

1-Introdução:

A Regra de Sociedade é uma das aplicações da Divisão Proporcional. Tem por objeto a divisão dos lucros ou dos prejuízos entre as pessoas (sócios) que formam uma sociedade, por ocasião do Balanço geral exigido anualmente por lei ou quando da saída de um dos sócios ou da admissão de um novo sócio.

Por convenção, o lucro ou prejuízo é dividido pelos sócios proporcionalmente aos capitais que empregaram, levando-se em conta as condições estipuladas no contrato social. Entende-se por sociedade um grupo de duas ou mais pessoas que se juntam, cada uma com um determinado capital, que deverá ser aplicado por certo tempo numa atividade qualquer e com o objetivo de conseguir lucros.

A regra de sociedade está ligada à divisão de lucros e prejuízos entre administradores de uma empresa. A divisão das finanças precisa ser realizada conforme o investimento de cada pessoa, isto é, o cálculo precisa ser proporcional ao dinheiro investido pelos acionistas. Consiste em dividir a quantia considerada em partes proporcionais ao capital empregado, ao tempo de aplicação ou a outras grandezas.

Exemplos:

a) Três sócios devem dividir proporcionalmente o lucro de R$ 30.000,00. O sócio A investiu R$ 60.000,00, o sócio B R$ 40.000,00 e o sócio C R$ 50.000,00. Qual a parte correspondente de cada um?

Solução:

Ao somarmos os valores que cada um receberá devemos constituir o lucro de R$ 30.000,00.

Como não sabemos o valor que cada um receberá, vamos considerar que:

$A = x \qquad B = y \qquad C = z$

Vamos relacionar os x, y e z aos investimentos de cada um, através de uma razão:

$$\frac{x}{60.000}+\frac{y}{40.000}+\frac{z}{50.000}=\frac{x+y+z}{60.000+40.000+50.000}=\frac{30.000}{150.000}=0,2$$

$$\frac{x}{60.000}=0,2 \qquad \frac{y}{40.000}=0,2 \qquad \frac{z}{50.000}=0,2$$

$$x=60.000*0,2 \qquad y=40.000*0,2 \qquad z=50.000*0,2$$

$$x=12.000 \qquad y=8.000 \qquad z=10.000$$

Os sócios receberão as seguintes quantias:
A = R$ 12.000   B = R$ 8.000   C = R$ 10.000

b) Quatro amigos resolveram comprar um bolão da loteria. Cada um dos amigos deu a seguinte quantia:

Carlos: R$ 5,00

Roberto: R$ 4,00

Pedro: R$ 8,00

João: R$ 3,00

Se ganharem o prêmio de R$ 500.000,00, quanto receberá cada amigo, considerando que a divisão será proporcional à quantia que cada um investiu?

Solução:

$$\frac{C}{5}+\frac{R}{4}+\frac{P}{8}+\frac{J}{3}=\frac{C+R+P+J}{20}=\frac{500.000}{20}=25.000$$

$$\frac{C}{5}=25.000 \qquad \frac{R}{4}=25.000 \qquad \frac{P}{8}=25.000 \qquad \frac{J}{3}=25.000$$

$$C=25.000*5 \qquad R=25.000*4 \qquad P=25.000*8 \qquad J=25.000*3$$

$$C=125.000 \qquad R=100.000 \qquad P=200.000 \qquad J=75.000$$

c) Duas pessoas investiram R$ 45.000,00 e R$ 30.000,00 na compra de uma casa em sociedade. Após determinado tempo eles resolveram vender a casa por R$ 90.000,00. Qual a parte que cada um irá receber pela venda dessa casa?

Solução:

Observe que o lucro foi igual a R$ 15.000,00, pois eles investiram R$ 75.000,00 e venderam por R$ 90.000,00.

$$\frac{x}{45}+\frac{y}{30}=\frac{x+y}{45+30}=\frac{15}{75}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{x}{45}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5x=45\Rightarrow x=\frac{45}{5}\Rightarrow x=9$$
$$\frac{y}{30}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5y=30\Rightarrow y=\frac{30}{5}\Rightarrow y=6$$

A divisão do lucro será a seguinte: quem investiu R$ 45.000,00 receberá R$ 9.000,00 e a pessoa que investiu R$ 30.000,00 receberá o valor de R$ 6.000,00.

d) Três pessoas formaram uma sociedade. A primeira entrou com R$ 20.000,00, a segunda, com R$ 50.000,00 e a terceira, com R$ 30.000,00. No balanço final de ano houve um lucro de R$ 20.000,00. Qual foi a quantia que cada sócio recebeu? Solução:

$$\frac{x}{20}+\frac{y}{50}+\frac{z}{30}=\frac{x+y+z}{20+50+30}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{x}{20}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5x=20\Rightarrow x=4$$
$$\frac{y}{50}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5y=50\Rightarrow y=10$$
$$\frac{z}{30}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5z=30\Rightarrow z=6$$

O 1º sócio recebeu R$ 4.000,00, o 2º, R$ 10.000,00 e o terceiro, R$ 6.000,00.

Revisando:

1. Definição

É uma divisão proporcional direta dos lucros ou prejuízos de uma empresa em relação ao tempo e ao capital empregado por cada sócio.

2. Tipos

Existem 4 casos possíveis:

Caso 1: O capital dos sócios é igual e o tempo de participação é igual.

Solução: Divisão proporcional e direta do lucro total da empresa por cada sócio.

Exemplo: João e José iniciaram uma sociedade em 01/01/2012, onde cada um contribuiu com R$ 15.000,00. Durante o ano de 2012 essa sociedade obteve lucro de R$ 20.000,00. Qual o lucro de cada sócio?
Primeiramente, observemos que o capital e o tempo investido de cada sócio foi o mesmo, obviamente, basta dividirmos o lucro total da empresa pelos dois sócios. Logo, cada sócio teve um lucro de R$ 10.000,00.

Caso 2: O capital dos sócios é igual e o tempo de participação é diferente.
Solução: Divisão proporcional direta do lucro/prejuízo em relação ao tempo de participação de cada sócio.
Exemplo: Pedro montou uma empresa no dia 01/01/12, tendo investido R$ 10.000,00. Em 01/07/2012, Tiago entrou em sociedade com Pedro, investindo o mesmo valor. Se no fim de 2012 a empresa teve um lucro de R$ 18.000,00, quanto coube a cada sócio?

Primeiramente, observemos que cada sócio investiu a mesma quantidade de dinheiro, o que muda é o tempo de participação na sociedade. Como Pedro trabalhou 12 meses e Tiago trabalhou 6 meses, temos um total de 18 meses trabalhados. Dividindo R$18.000,00 / 18 meses, temos que cada mês de trabalho valeu R$ 1.000,00. Logo, Pedro recebeu R$ 12.000,00 e Tiago recebeu R$ 6.000,00.

Caso 3: O capital dos sócios é diferente e o tempo de participação é igual.
Solução: Divisão proporcional direta do lucro/prejuízo em relação ao capital empregado por cada sócio.

Exemplo: Ana e Amanda montaram uma sociedade no dia 01/01/12, sendo que Ana investiu R$ 10.000,00 e Amanda investiu R$ 15.000,00. Se no fim de 2012 a empresa teve um lucro de R$ 36.000,00, quanto coube a cada sócio?

Primeiramente, observemos que os sócios permaneceram pelo mesmo tempo na sociedade, por este motivo, a divisão deveria ser igual. Porém, Amanda investiu mais dinheiro do que Ana. Nosso problema consiste em calcular em porcentagem, quanto cada uma investiu em relação ao capital total da empresa. Temos que o capital total da empresa é de R$ 10.000,00 + R$ 15.000,00 = R$ 25.000,00. Assim:
Ana investiu 10000/25000 = 0,4 ou 40%

Amanda investiu 15000/25000 = 0,6 ou 60%

Para calcularmos quanto cada uma recebeu, basta calcularmos as porcentagens sobre o lucro de R$ 36.000,00.

Ana recebeu 40% de 36000 = R$ 14.400,00

Amanda recebeu 60% de 36000 = R$ 21.600,00

Caso 4: O capital e o tempo de participação dos sócios são diferentes.

Solução: Divisão proporcional direta dos lucros ou prejuízos de uma empresa em relação ao tempo e ao capital empregado por cada sócio.

Exemplo: Em uma sociedade o lucro foi de R$ 2.700,00. Calcular quanto os sócios Juca e Paulo devem receber, sabendo que Juca investiu R$ 1.200,00 e trabalhou 3 meses, enquanto Paulo investiu R$ 900,00 e trabalhou 5 meses.

O problema é um pouco mais complexo que os anteriores, porém seguindo os passos abaixo se torna simples:

1) Multiplicar o que cada sócio recebeu pela quantidade de meses trabalhados:

Juca: 1200 x 3 = 3600

Paulo: 900 x 5 = 4500

2) Somar os valores obtidos:

3600 + 4500 = 8100

3) Dividir o lucro pelo valor acima:

2700 / 8100 = 1/3

4) Finalmente, multiplicar 1/3 pelos valores encontrados no passo (1)

Juca: 3600 x 1/3 = R$ 1.200,00

Paulo: 4500 x 1/3 = R$ 1.500,00

CAPÍTULO 5 – REGRA DE TRÊS

1-Introdução:

Chamamos de Regra de Três os problemas nos quais figura uma grandeza que é direta ou inversamente proporcional a uma ou mais grandezas. Temos dois tipos de regra de três: a simples, que trabalha com apenas duas grandezas, e a composta, que envolve mais de duas grandezas.

A regra de três é uma técnica que permite resolver problemas que envolvem duas grandezas relacionadas, para os quais determinamos o valor de uma das grandezas, conhecendo-se os outros três valores envolvidos.

2-Regra de três simples

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

A regra de três simples é muito utilizada em situações cotidianas que envolvam proporções entre grandezas, sendo também muito utilizada em situações que envolvam cálculos financeiros, misturas químicas, conversões de grandezas na Física.

Roteiro para resolução de problemas de regra de três simples:

1º) Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º) Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

- Indicar duas grandezas diretamente proporcionais com flechas de mesmo sentido.
- Indicar duas grandezas inversamente proporcionais com flechas de sentido contrário.

3º) Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplos:

a) Com uma área de absorção de raios solares de $1,2m^2$, uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para $1,5m^2$, qual será a energia produzida?

Solução: montando a tabela:

Área (m^2)	Energia (Wh)
1,2	400
1,5	x

Identificação do tipo de relação:

Área	Energia
1,2	400 $\downarrow$
1,5	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna).

Observe que: Aumentando a área de absorção, a energia solar aumenta.

Como as palavras correspondem (aumentando - aumenta), podemos afirmar que as grandezas são diretamente proporcionais. Assim sendo, colocamos outra seta no mesmo sentido (para baixo) na 1ª coluna. *Montando a proporção e resolvendo a equação temos*:

Área	Energia
1,2 $\downarrow$	400 $\downarrow$
1,5	x

$$\frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{400}{x}$$

$$1{,}2x = 1{,}5.400$$

$$x = \frac{1{,}5.400}{1{,}2} = 500$$

Logo, a energia produzida será de 500 watts por hora.

b) Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400Km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480km/h?

Solução: montando a tabela:

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Identificação do tipo de relação:

Velocidade	Tempo
400	3 $\downarrow$
480	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna).

Observe que: **Aumentando** a velocidade, o tempo do percurso **diminui**.

Como as palavras são contrárias (aumentando - diminui), podemos afirmar que as grandezas são **inversamente proporcionais**. Assim sendo, colocamos uma outra seta no sentido contrário (para cima) na 1ª coluna. *Montando a proporção e resolvendo a equação temos*:

Velocidade	Tempo
400	3
480	x

$$\frac{3}{x} = \frac{480}{400}$$

Invertemos os termos

$$480x = 3 . 400$$

$$x = \frac{3 . 400}{480} = \frac{1200}{480} = 2{,}5$$

Logo, o tempo desse percurso seria de 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos.

c) Bianca comprou 3 camisetas e pagou R$120,00. Quanto ela pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço?

Solução*:* montando a tabela:

Camisetas	Preço (R$)
3	120
5	x

Observe que: **Aumentando** o número de camisetas, o preço **aumenta**.

Como as palavras correspondem (aumentando - aumenta), podemos afirmar que as grandezas são **diretamente proporcionais**. *Montando a proporção e resolvendo a equação temos*:

$$\frac{3}{5} = \frac{120}{x}$$

$$3x = 5 . 120$$

$$x = \frac{5 . 120}{3} = 200$$

Logo, a Bianca pagaria R$200,00 pelas 5 camisetas.

d) Uma equipe de operários, trabalhando 8 horas por dia, realizou determinada obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço for reduzido para 5 horas, em que prazo essa equipe fará o mesmo trabalho?

Solução*:* montando a tabela:

Horas por dia	Prazo para término (dias)
8	20

5	x

Observe que: **Diminuindo** o número de horas trabalhadas por dia, o prazo para término **aumenta**. Como as palavras são contrárias (diminuindo - aumenta), podemos afirmar que as grandezas são **inversamente proporcionais**. *Montando a proporção e resolvendo a equação temos*:

$$\frac{x}{20} = \frac{8}{5}$$

Invertemos os termos

$$5x = 20.8$$

$$x = \frac{160}{5} = 32$$

3-Regra de três composta

A regra de três composta é um processo prático para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais. Para colocar as flechas, comparamos cada grandeza com aquela que contém a incógnita x.

Exemplos:

a) Em 8 horas, 20 caminhões descarregam $160m^3$ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar $125m^3$?

Solução: montando a tabela, colocando em cada coluna as grandezas de mesma espécie e, em cada linha, as grandezas de espécies diferentes que se correspondem:

Horas	Caminhões	Volume
8	20	160
5	x	125

Identificação dos tipos de relação:

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna).

Horas	Caminhões	Volume
8	20 ↓	160
5	x	125

A seguir, devemos comparar cada grandeza com aquela onde está o x.

Observe que: **Aumentando** o número de horas de trabalho, podemos **diminuir** o número de caminhões. Portanto a relação é *inversamente proporcional* (**seta para cima na 1ª coluna**). **Aumentando** o volume de areia, devemos **aumentar** o número de caminhões. Portanto a relação é *diretamente proporcional* (**seta para baixo na 3ª**

coluna). Devemos igualar a razão que contém o termo x com o produto das outras razões de acordo com o sentido das setas.

Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

$$\frac{20}{x}=\frac{160}{125}\cdot\boxed{\frac{5}{8}}$$

Termos foram invertidos (seta contrária)

Horas	Caminhões	Volume
8	20	160
5	x	125

$$\frac{20}{x}=\frac{\cancelto{20}{160}}{\cancelto{25}{125}}\cdot\frac{\cancelto{1}{5}}{\cancelto{1}{8}}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$$

$$x=\frac{5.\,20}{4}=25$$

Logo, serão necessários **25 caminhões**.

b) Numa fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?

Solução: montando a tabela:

Homens	Carrinhos	Dias
8	20	5
4	x	16

Observe que: **Aumentando** o número de homens, a produção de carrinhos **aumenta**. Portanto a relação é *diretamente proporcional* (não precisamos inverter a razão).**Aumentando** o número de dias, a produção de carrinhos **aumenta**. Portanto a relação também é *diretamente proporcional* (não precisamos inverter a razão). Devemos igualar a razão que contém o termo x com o produto das outras razões.

Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

$$\frac{20}{x}=\frac{8}{4}\cdot\frac{5}{16}$$

$$x=\frac{20\,.\,4.\,16}{8.\,5}=32$$

Logo, serão montados **32 carrinhos**.

c) Dois pedreiros levam 9 dias para construir um muro com 2m de altura. Trabalhando 3 pedreiros e aumentando a altura para 4m, qual será o tempo necessário para completar esse muro?

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x. Depois colocam-se flechas concordantes para as grandezas **diretamente proporcionais** com a incógnita e discordantes para as **inversamente proporcionais**, como mostra a figura abaixo:

pedreiros	altura	dias
↑ 2	↓ 2	9 ↓
3	4	x

Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

$$\frac{9}{x} = \frac{2}{4} \cdot \boxed{\frac{3}{2}}$$

Termos foram invertidos (seta contrária)

$$x = \frac{9.8}{6}$$

$$x = 12$$

Logo, para completar o muro serão necessários **12 dias**.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas? Resposta: 6 horas.

2) Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão? Resposta: 35 dias.

3) Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 300m. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 225m? Resposta: 15 dias.

4) Um caminhoneiro entrega uma carga em um mês, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deveria viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h? Resposta: 10 horas por dia.

5) Com uma certa quantidade de fio, uma fábrica produz 5400m de tecido com 90cm de largura em 50 minutos. Quantos metros de tecido, com 1 metro e 20 centímetros de largura, seriam produzidos em 25 minutos? Resposta: 2025 metros.

CAPÍTULO 6 – PORCENTAGEM

1-Introdução:

Porcentagem ou percentagem está frequentemente ligada a situações de correção monetária, investimentos, cálculo de juros, descontos, lucros, dentre outras.

O nome tem origem do latim “per centum” e quer dizer “por cento” ou “a cada centena”, ou seja, uma razão de base 100. É frequentemente utilizada em transações comerciais.

É um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 (dois) valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100 (cem), ou seja, é dividir um número por 100 (cem).

Ao número p% associa-se a razão p/100, ou seja, toma-se p partes de um todo que foi dividido em 100 partes iguais.

15% (quinze por cento) = 15/100 = 3/20 = 0,15
20% (vinte por cento) = 20/100 = 1/5 = 0,20
25% (vinte e cinco por cento) = 25/100 = 1/4 = 0,25
40% (quarenta por cento) = 40/100 = 2/5 = 0,40
120% (cento e vinte por cento) = 120/100 = 6/5 = 1,2

A porcentagem é uma das áreas da Matemática mais conhecidas. Praticamente é utilizada em todas as áreas, quando queremos comparar grandezas, estimar o crescimento de algo, expressar uma quantidade de aumento ou desconto do preço de alguma mercadoria. Vemos porcentagem a todo o momento e, mesmo quando não percebemos, estamos fazendo uso dela.

Porcentagem é a relação entre dois valores onde o numerador (número superior da fração) é a parte e o denominador (número inferior da fração) é o inteiro. Trata-se da razão entre dois números com base 100. Em resumo, porcentagem nada mais é que dividir um número por 100.

Quando falamos que um determinado produto é 40% (sessenta por cento) do estoque de uma loja, por exemplo, estamos dizendo que existem 40 produtos no universo (o total) de 100 ou que a razão é de 40 para 100.

Exemplos:

a)Uma determinada loja de eletrodomésticos vende seus produtos em até 10 vezes, incluído os juros. No caso de pagamento à vista a loja oferece um desconto de 15% sobre o preço da mercadoria. Na compra à vista de uma geladeira que custa R$ 1.200,00, qual o valor do desconto?

Solução:

15% = 15/100 = 3/20 = 0,15

Pode-se resolver o problema de duas maneiras. Observe:

Multiplicando o valor de R$1200 por 15 e depois dividindo por 100.

1200 x 15/100 = 18000/100 = ***180***

Multiplicando o valor de R$1200 por 0,15.

1200 x 0,15 = ***180***

Resposta: O desconto na compra à vista da geladeira é de R$ 180,00, dessa forma, o preço seria de 1200 – 180 = R$ 1.020,00.

b) O atraso no pagamento de qualquer imposto ou até mesmo de prestações particulares gera multas que são calculadas com base em índices percentuais, regularizados pelos órgãos competentes. Qual o valor de uma prestação de R$ 550,00 que foi paga com atraso de 10 dias, sabendo que sobre o valor deverá ser acrescentado 4% de multa?

Solução:

4% = 4/100 = 1/25 = 0,04

Resolvendo de duas maneiras:

1º) 550 x 4/100 = 2200/100 = 22

2º) 550 x 0,04 = 22

Resposta: O acréscimo em razão do atraso será de R$22,00, portanto, a prestação passará de R$ 550,00 para R$ 572,00.

c) Um jogador de futebol, ao longo de um campeonato, cobrou 75 faltas, transformando em gols 8% dessas faltas. Quantos gols de falta esse jogador fez?

Solução:

$$8\% \text{ de } 75 = \frac{8}{100}.75 = \frac{600}{100} = 6$$

Portanto o jogador fez 6 gols de falta.

d) Se eu comprei uma ação de um clube por R$250,00 e a revendi por R$300,00, qual a taxa percentual de lucro obtida?

Solução:

Montamos uma equação, onde somando os R$250,00 iniciais com a porcentagem que aumentou em relação a esses R$250,00, resulte nos R$300,00.

$$250 + 250.\frac{x}{100} = 300$$
$$2{,}5.x = 300 - 250$$
$$x = \frac{50}{2{,}5}$$
$$x = 20$$

Portanto, a taxa percentual de lucro foi de 20%.

e) João vendeu 50% dos seus 50 cavalos. Quantos cavalos ele vendeu?

Solução:

Para solucionar esse problema deve-se aplicar a taxa percentual (50%) sobre o total de cavalos.

$$50\% \text{ de } 50 = \frac{50}{100}.50 = \frac{2500}{100} = 25 \text{ cavalos}$$

Logo, ele vendeu 25 cavalos, que representa a **porcentagem** procurada.

f) Uma mercadoria é vendida em, no máximo, três prestações mensais e iguais, totalizando o valor de R$ 900,00. Caso seja adquirida à vista, a loja oferece um desconto de 12% sobre o valor a prazo. Qual é o preço da mercadoria na compra à vista?

Solução**:**

Podemos utilizar a razão centesimal ou o número decimal correspondente:

12% = 12/100 = 0,12

Razão centesimal

12/100 x 900 = 12x900/100 = 1080/100 = 10800/100 = 108 reais

900 – 108 = 792 reais

Número decimal

0,12 x 900 = 108 reais

900 – 108 = 792 reais

Obs.: A utilização de qualquer procedimento fica a critério próprio, pois os dois métodos chegam ao resultado de forma satisfatória e exata. Nesse exemplo, o desconto no pagamento à vista é de R$ 108,00, portanto, o preço é de R$ 792,00.

g) Em uma sala de aula com 52 alunos, 13 utilizam bicicletas como transporte. Expresse em porcentagem a quantidade de alunos que utilizam bicicleta.

Solução**:**

Podemos utilizar uma regra de três simples.

Alunos → 13 ---------- 52

Porcentagem → x ----------- 100%

52.x = 13.100

52x = 1300

x= 1300/52

x = 25%

Portanto, 25% dos alunos utilizam bicicletas.

h) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

A) 15,00 B) 14,00 C) 10,00 D) 5,00 E) 4,00

Solução:

Antes de mais nada, você deve ler o exercício com atenção e anotar os valores que são dados:

Valor original do produto: R$50,00.

Preços possuem 20% de desconto.

Logo:

$$\frac{50}{x} = \frac{100}{20}$$

x . 100 = 50 . 20

x . 100 = 1000

x = 1000 / 100

x = 10

Assim, o desconto inicial será de R$10,00. Calculando sobre o valor original do produto: R$50,00 – R$10,00 = R$40,00.

Se a pessoa tiver o cartão fidelidade, o desconto será ainda maior, ou seja, o cliente vai pagar R$40,00 com mais 10% de desconto:

Assim,

$$\frac{40}{x} = \frac{100}{10}$$

x . 100 = 40 . 10
x . 100 = 400
x = 400 / 100
x = 4

Logo, o desconto da economia adicional para quem possui o cartão fidelidade será de mais **R$4,00**. Portanto, a Letra (**E**) é a alternativa correta.

i)Imagine uma situação na qual um vendedor ofereça duas ofertas para que o cliente escolha, a saber: 10% de desconto ou $(10\%)^2$ de desconto ?

Solução:

Acertou se escolheu 10% de desconto, pois $(10\%)^2$ nada mais é que $(10\%)^2=(10/100)^2=(1/10)^2= (1/100) = 1\%$.

j) Numa classe de 40 alunos, 36 foram aprovados. Qual foi a taxa de porcentagem correspondente?

Solução:

Alunos		%
40	....	100
36	....	x

$$\frac{40}{36} = \frac{100}{x} \rightarrow 40\,x = 3600 \rightarrow x = \frac{3600}{40} \rightarrow x = 90$$

Resposta: A aprovação foi de 90 %.

k) Comprei uma camisa e obtive um desconto de R$12,00, que corresponde à taxa de 5%. Qual era o preço da camisa?

Solução:

R$ %

x 100

12 5

$$\frac{x}{12} = \frac{100}{5} \rightarrow 5\,x = 1200 \rightarrow x = \frac{1200}{5} \rightarrow x = 240$$

Resposta: A camisa custava R$ 240,00.

Obs.: Uma dica importante: o **FATOR DE MULTIPLICAÇÃO**.

Se, por exemplo, há um acréscimo de 10% a um determinado valor, pode-se calcular o novo valor apenas multiplicando esse valor por **1,10**, que é o fator de multiplicação. Se o acréscimo for de 20%, multiplicamos por **1,20**, e assim por diante. Veja a tabela abaixo:

Acréscimo ou Lucro	Fator de Multiplicação
10%	1,10
15%	1,15
20%	1,20
47%	1,47
67%	1,67

Exemplo*:* Aumentando 10% no valor de R$10,00 temos: 10 x 1,10 = **R$ 11,00**

No caso de haver um decréscimo, o fator de multiplicação será: Fator de Multiplicação = 1 - taxa de desconto (na forma decimal)

Veja a tabela abaixo:

Desconto	Fator de Multiplicação
10%	0,90
25%	0,75
34%	0,66
60%	0,40
90%	0,10

Exemplo: Descontando 10% no valor de R$10,00 temos: 10 x 0,90 = **R$ 9,00**

2- Operações Comerciais

Operações Comerciais: são operações de compra, venda ou permuta de mercadorias, realizadas com o objetivo de lucrar.

Convém ressaltar que o custo de uma mercadoria não se limita ao seu custo de aquisição. No custo, também entram fatores tais como: gastos de armazenagem, transporte, comercialização, etc. O levantamento sistemático do custo de uma mercadoria é feito, nas empresas mais estruturadas, através de uma planilha. No entanto, é muito comum, empresários simplesmente arbitrarem uma determinada taxa de lucro a qual imaginam cobrir suas despesas e permitir um lucro líquido razoável.

Lucro: diferença entre o preço de venda e o preço de custo.
Custo(de uma mercadoria): preço da aquisição composto com fatores tais como gastos de armazenagem, transporte, comercialização, etc.
Taxa de Lucro (ou prejuízo): é uma taxa arbitrada (pelo comerciante) para permitir um lucro líquido razoável.

Exemplo A: "Vendi uma mercadoria com 20% de lucro" (sobre o quê?)
Exemplo B: "Vendi uma mercadoria com apenas 10% de prejuízo" (sobre o quê?)

Situações como as exemplificadas geram dúvidas, pois a taxa pode ser aplicável ao preço de compra (capital empregado pelo comerciante) ou ao preço de vendas (divulgado aos clientes). É claro que, na maioria das vezes, a taxa de lucro (ou prejuízo) refere-se ao preço de compra da mercadoria, pois este é o capital empregado pelo comerciante. No entanto, algumas vezes, é mais fácil trabalhar com taxas sobre o preço de vendas, pois este, em geral, é o que está escrito nas tabelas, cartazes, etiquetas, etc.

Exemplo:
Um comerciante fixou em 80% o lucro sobre o preço de aquisição de suas mercadorias. Se uma delas custou R$ 120,00, por quanto deverá vendê-la?
Solução:
V= preço de venda   C= preço de custo   L= Lucro   i= taxa de lucro
$L = i \cdot C \ \rightarrow L = 80\% \ (120{,}00) \rightarrow L = R\$ \ 96{,}00$
$V = C + L \rightarrow V = 120{,}00 + 96{,}00\ ) \rightarrow V = R\$ \ 216{,}00$
1º caso: Lucro baseado no preço de custo
V= preço de venda   C= preço de custo   L= Lucro   i= taxa de lucro
Sendo: $\mathbf{L = i \cdot C}$ **e** $\mathbf{V = C + L}$
Então: $\mathbf{V = C + i \cdot C \quad \rightarrow \quad V = C\,(1 + i)}$

Exemplo:

a)Um objeto que custou R$ 285,00 foi vendido por R$ 319,20. Qual foi a taxa de lucro sobre o preço de custo?

Solução:

$V = C (1 + i) \rightarrow 319{,}20 = 285{,}00 (1 + i) \rightarrow 319{,}20/ 285{,}00 (1 + i) \rightarrow 1{,}12 = 1 + i \rightarrow i = 0{,}12 \rightarrow i = 1{,}12 - 1 \rightarrow i = 12\%$

b) Vendi um objeto por R$ 58,50 e ganhei 30% sobre o preço de custo. Quanto paguei por esse objeto?

Solução:

$I = 30\% = 30/100 = 0{,}30$

$V = C (1 + i) \rightarrow 58{,}50 = C. (1 + 0{,}3)$ $\rightarrow 58{,}50 = C . 1{,}30 \rightarrow C = 58{,}50 / 1{,}3 \rightarrow C = 45$

Resposta: R$ 45,00

c) Por quanto devo vender um aparelho que comprei por R$ 4000,00, a fim de obter um lucro de 20% sobre a compra?

Solução:

Este é o caso mais simples e comum do cálculo de lucro. Lembrando que lucro é a diferença entre o preço de compra e o preço de venda. Para resolver esse problema, basta aplicar 20% em 4000.

20% de 4000 = 0,20 x 4000 = 800

Resposta: Dessa forma o lucro será de R$800,00 e o aparelho será vendido por R$4800,00.

Pode-se também calcular diretamente o preço de venda, fazendo o seguinte:

Preço de venda = (1 + taxa sobre a compra) x preço de compra

Preço de venda = (1 + 0,20) x 4000 = 1,2 x 4000 = 4800

Obs.: O número 1 que aparece entre parênteses, sendo somado ao 0,20, deve-se ao valor da compra, ou seja, 100% = 100/100 = 1.

Ou ainda pode-se empregar a fórmula para calcular diretamente:

$V = C (1 + i) \rightarrow V = 4000 . (1 + 0{,}20) \rightarrow 4000 \times 1{,}2 = 4800.$

2º caso: Lucro sobre preço de venda

V= preço de venda   C= preço de custo   L= Lucro   i= taxa de lucro

Sendo: **$L = i . V$ e $V = C + L$**

Então: $V = C + L \rightarrow C = V - L \rightarrow C = V - i.\ V \rightarrow C = V\ (1 - i)$

Exemplo:

a) Um objeto custou R$ 16,00. Pretendo vendê-lo c om 20% de lucro sobre o preço de venda. A que preço devo vendê-lo?

Solução:

20% = 20/100 = 0,20

$C = V\ (1 - i) \rightarrow 16 = V\ (1 - 0{,}20) \rightarrow 16 = 0{,}80\ .\ V \rightarrow V = 16/0{,}80 \rightarrow V = 20$

Resposta: R$ 20,00.

b) Na venda de uma mercadoria um comerciante ganhou 15% de lucro sobre o preço de venda, isto é, R$ 10,50. Qual foi o preço de custo?

Solução:

15% = 15/100 = 0,15

$C = V\ (1 - i) \rightarrow 10{,}5 = 0{,}15.\ V \rightarrow V = 10{,}5/\ 0,\ 15 \rightarrow V = 70$

$C = V - L \rightarrow C = 70 - 10{,}50 \rightarrow C = 70 - 10{,}50 \rightarrow C = 59{,}50$

Resposta: R$ 59,50

c) Calcular o lucro e por quanto devo vender um objeto que comprei por R$4000,00 para ganhar 20% sobre o preço de venda.

Solução:

Trata-se de calcular 20% de uma quantia que ainda é desconhecida. O que se deve fazer é considerar esse preço de venda desconhecido como 100% e, consequentemente, tomar o preço de compra conhecido como 80%, já que o lucro será de 20%. Pode-se resolver o problema usando uma regra de três.

%	R$
80............	4000
100...........	x

Então: $80\ x = 100\ x\ 4000 \rightarrow 80\ x = 400000 \rightarrow x = 5000.$

Resposta: R$ 5000,00.

Pode se calcular rapidamente o preço de venda usando a fórmula.

$C = V\ (1 - i) \rightarrow 4000 = V\ (1 - 0{,}20) \rightarrow 4000 = V\ .\ 0{,}80 \rightarrow V = 4000/0{,}80 \rightarrow$

$V = 5000.$

3º caso: Operações com Prejuízo

O prejuízo é caracterizado por uma taxa de lucro negativa, o que provoca a mudança nos sinais dos números que exprimem as taxas dos casos anteriores.

V= preço de venda C= preço de custo L= Lucro i= taxa de lucro

I) Prejuízo sobre o preço de custo

L = i .V e, no caso, V = C – L então

V = C – i. C → V = C (1 – i)

II) Prejuízo sobre o preço de venda

L = i .V e, no caso, V = C – L então

C = V + i. V → C = V (1 + i)

Exemplos:

a) Comprei um objeto por R$ 45,00. Precisando de dinheiro, fui obrigado a vendê-lo com 20% de prejuízo. Por quanto vendi?

Solução:

20% = 20/100 = 0,20

V = C (1 – i) → V = 45 (1 – 0,20) → V = 45 . 0,80 → V = 36 Resposta: R$ 36,00.

b) Vendi por apenas R$ 120,00 um objeto que me custou R$ 230,00. Qual a taxa de porcentagem de prejuízo sobre o valor de compra?

Solução:

V = C (1 – i) → 120 = 230 (1 – i) → 120 = 230 – 230 i → 120 – 230 = – 230 i →

– 110 = – 230 i → 110 = 230 i → i = 110 / 230 → i = 0,4782 → i = 47,82 %

c) Calcular o prejuízo e o preço de venda de um objeto que comprei por R$60,00, tendo uma perda de 30% sobre o preço de compra.

Solução:

Calcular 30% de prejuízo em R$60,00 é aplicar 30% em R$60,00.

Porcentagem = 0,30 x 60 = 18

Resposta: Dessa forma o prejuízo será de R$18,00.

Preço de venda = preço de compra – prejuízo

Então, o preço de venda é : R$60,00 – R$18,00 = R$42,00

Também podemos calcular o preço de venda usando a fórmula:

V = C (1 – i) → V = 60. (1 – 0,30) → V = 60. 0,70 → V = 42

Prejuízo = 60 – 42 = 18.

d) Calcular o prejuízo e o preço de venda de um objeto que comprei por R$80,00, tendo perdido 25% do preço de venda.

Solução:

Trata-se de calcular 25% de uma quantia desconhecida. Novamente, vamos considerar essa quantia desconhecida como 100%. Portanto, o preço de compra foi de 125%, já que o prejuízo foi de 25%. Então:

%	R$
125	80,00
100	x

$125\,x = 100 \,.\, 80 \rightarrow 125\,x = 8000 \rightarrow x = 8000 / 125 \rightarrow x = 64$

Prejuízo = 80 – 64 = 16

Resposta: Assim o objeto será vendido por R$64,00 e o prejuízo será de R$ 16,00.

Também podemos calcular o preço de venda usando a fórmula:

$\mathbf{C = V\,(1 + i) \rightarrow 80 = V\,(1 + 0{,}25) \rightarrow 80 = V.\,1{,}25 \rightarrow V = 64.}$

25% de 64 = 0,25 x 64 = 16

4º caso: Fatores de Aumento e Redução

Uma mercadoria deverá ter seu preço aumentado em 20%. Basta multiplicarmos seu preço antigo por 1,20 pois 100% + 20% é igual a 120% = 1,20. Neste caso 1,20 é denominado fator de aumento. Se o preço de uma mercadoria deve ser diminuído em 20%, o fator multiplicador é 0,80, pois 100% menos 20% é igual a 80%. Logo 0,80 é chamado fator de desconto (ou redução).

Observações:

- Fatores de aumento sempre são maiores que 1.
- Fatores de redução sempre estão entre 0 e 1.
- Podemos usar mais de um fator e também misturá-los (aumento e redução) numa mesma questão.

Exemplos:

a)Dois aumentos sucessivos de 10% numa mercadoria correspondem a um aumento único de quantos por cento?

Solução:

Não são “óbvios” 20%, pois o 2º aumento é em cima da mercadoria já aumentada em 10%. Supondo a mercadoria com preço P, teremos:

P.(1,10).(1,10) = P.(1,21), ou seja, um aumento de 21% (100% + 21% = 121% = 1,21).

b)Sobre o valor de uma certa compra foram feitos dois abatimentos sucessivos de 10% e 15%. Calcule o desconto único que substituiria os dois abatimentos.

Solução:

Basta aplicar os dois fatores de desconto na mercadoria de preço P.

Logo: P.(0,90).(0,85) = P.(0,765) e

assim teremos um desconto de 23,5% (100% – 76,5% = 23,5%).

c) **(FUVEST)** Na reprodução de uma figura, a primeira cópia obtida reduziu em 30% a área desta figura. A seguir, esta cópia foi reproduzida com ampliação de 40%. A área da figura obtida na segunda cópia, comparada com a área da figura original, é

A) 98% menor B) 90% maior C) exatamente igual D) 90% maior E) 2% menor

Solução:
Chamando a área inicial de X, teremos:
X. (0,70).(1,40) = X.(0,98) ou seja, 2% menor **letra E.**

d) Sobre uma fatura de R$1000,00 são feitos descontos de 10%, mais 6% e mais 3. Qual é o valor líquido da fatura?

Solução:

Para resolver este problema, precisamos calcular descontos sucessivos, ou seja, calcular os descontos sobre as quantias líquidas, já descontadas as taxas anteriores.

Assim:

10% de 1000 = 100

A fatura se torna: 1000 – 100 = 900

6% de 900 = 54

A fatura se torna: 900 – 54 = 846

3% de 846 = 25,38

A fatura se torna: 846 – 25,38 = 820,62

Resposta: Após os descontos, o valor líquido da fatura será R$820,62.

Poderíamos obter o mesmo resultado de outra forma:

Valor líquido = 1000. (1– 0,10). (1– 0,06). (1– 0,03)

Nesta expressão cada valor entre parênteses refere-se a um desconto

Valor líquido = 1000. (0,90).(0,94).(0,97)

Valor líquido = 1000. 0,82062 = 820,62

De modo geral, um valor bruto submetido a descontos sucessivos de várias taxas torna-se um valor líquido que pode ser calculado por:

Valor líquido = valor bruto. (1 – 1ª taxa). (1 – 2ª taxa).((1 – 3ª taxa). ... . (1 – enésima taxa)

Nesta expressão, n é o número de taxas sucessivas.

e) Uma firma distribuidora oferece, sobre o valor de uma fatura, os descontos sucessivos de 10%, 4% e 5%. Sabendo que o valor da fatura é de R$4800,00, qual é o valor líquido da mesma?

Solução:

Valor líquido = 4800.(1 – 0,10) .(1 – 0,04) .(1 – 0,05) = 4800.(0,90).(0,96).(0,95) =

4800 x 0,8208 = 3939,84 Resposta: O valor líquido da fatura é de R$3939,84.

f) Sobre um artigo de R$2500,00 incide um imposto federal de 10% e um estadual de 4%. Qual é o preço final desse artigo?

V = 2500. (1 + 0,10) .(1 + 0,04) = 2500. (1,1).(1,04) = 2500 x 1,144 = 2860

Resposta: O preço final é de R$2860,00.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1- Represente as frações abaixo na forma percentual.

a) $\frac{7}{10}$ b)$\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

2- Calcule:

a) 30% de 1500.

b)12% de 120.

c)27% de 900.

d)55% de 300.

e)98% de 450.

3- Sabendo que 45% de um número equivalem a 36, determine esse número.

4- Em uma turma de 40 alunos, 45% são meninos. Quantos meninos e meninas tem a turma?

5- Um objeto que custava R$ 900,00 teve um aumento de R$ 50,00. Qual foi o percentual de aumento?

6- Um terreno que custava R$ 50.000,00 há dois anos teve uma valorização de 16,5% nos últimos 24 meses. Qual o valor atual do terreno?

7- Uma loja de eletrodomésticos dá 10% de desconto para pagamentos à vista. Nesse caso, quanto se paga à vista por uma geladeira cujo preço original é R$ 1.200,00?

Respostas: 1.a) 70%; b) 20%; c) 15%; d) 75%; e) 12,5%.
2.a) 450; b) 14,4; c) 243; d) 165; e) 441.
3.80.
4.18 meninos e 22 meninas.
5.5,56%.
6.R$ 58.250,00.
7.R$ 1.080,00.

CAPÍTULO 7 – JUROS SIMPLES

1-Introdução:

O conceito de juro é muito antigo, tendo sua existência observada desde as primeiras civilizações. Seu primeiro registro aparece na Babilônia em 2000 a.C., quando o pagamento dos juros era realizado através de uma moeda muito comum, as sementes. Contudo, na ausência de sementes, o pagamento era efetuado através de outros bens. Desse hábito, nasceram muitas das práticas relativas à matemática financeira, vigentes atualmente.

A partir do aperfeiçoamento das técnicas utilizadas em cálculos financeiros, surgiu no ano de 575 a.C, uma firma de banqueiros internacionais, que tinha seu escritório na Babilônia. A renda desta firma era coletada a partir das altas taxas de juros cobradas pelos empréstimos de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional – como em dias atuais. Apesar de muito antiga, a ideia de juros pouco mudou ao longo do tempo.

Juro é o aluguel que pagamos pelo tempo em que determinada quantia fica emprestada a nós. Também, é o pagamento que recebemos – igualmente ao caso anterior – quando emprestamos certa quantia a alguém. Assim, Juro é remuneração do capital empregado.

Segundo, essa definição, se aplicarmos ou emprestarmos capital a outrem, existe um valor adicional a ser cobrado pela utilização desse dinheiro. Por exemplo, ao se aplicar um capital, em um período de tempo específico, ao final dessa aplicação o capital terá adquirido outro valor, chamado de montante. O montante é o capital aplicado mais os juros que foram acumulados durante o período da aplicação. O juro, também chamado de remuneração, rendimento ou juros ganhos é dado pela diferença entre o montante (M) e o capital (C).

Os sumérios, povo que viveu na região da Mesopotâmia, já utilizava ideias sobre juros simples e compostos, assim como, crédito. Nessa época – 2100 a.C – esse povo fazia seus registros em tábuas de argila, nas quais das mais de 50 000 encontradas, 400 eram totalmente voltadas à matemática.

Geralmente, os juros são determinados pelo Copom (Comitê de Política Monetária), um órgão do Banco Central que estabelece as normas da política monetária e da taxa de juros.

O regime de juros simples não é muito utilizado pelo atual sistema financeiro nacional, mas ele se relaciona à cobrança em financiamentos, compras a prazo, impostos atrasados, aplicações bancárias, etc. Nesse processo, a taxa de juros é somada ao capital inicial durante o período da aplicação.

O cálculo dos juros simples é sempre feito sobre o capital inicial a certa taxa e, evidente, determinado período de tempo.

Vamos utilizar as seguintes representações:

Juros **(J)** - Capital **(c)** - Taxa **(i)** - Período **(t)**

Podemos calcular os juros simples utilizando a fórmula: **J = c . i . t.**

a.d → ao dia - **a.m** → ao mês - **a.b** → ao bimestre - **a.t** → ao trimestre - **a.s** → ao semestre - **a.a** → ao ano

Exemplos:

a) Qual o valor dos juros aplicados a um empréstimo de R$ 200, durante 6 meses, numa taxa de juros simples de 6% ao mês?

Solução:

C= R$ 200 i = 6 %a.m. t = 6 meses J = ?

Conversão da taxa de juros:

6% → 6/100 → 0,06

J = C . i . t → J = 200 x 0,06 x 6 → J = R$ 72,00

Explicação do Problema em Juros Simples

1º mês → R$ 200 x 0,06 = R$ 12,00 (ou seja, R$ 200 de capital renderá R$ 12 de juros)

2º mês → R$ 200 x 0,06 = R$ 12,00 (ou seja, R$ 200 de capital renderá R$ 12 de juros)

3º mês → R$ 200 x 0,06 = R$ 12,00 (ou seja, R$ 200 de capital renderá R$ 12 de juros)

4º mês → R$ 200 x 0,06 = R$ 12,00 (ou seja, R$ 200 de capital renderá R$ 12 de juros)

5º mês → R$ 200 x 0,06 = R$ 12,00 (ou seja, R$ 200 de capital renderá R$ 12 de juros)

6º mês → R$ 200 x 0,06 = R$ 12,00 (ou seja, R$ 200 de capital renderá R$ 12 de juros)

Na soma dos juros durante seis meses temos R$ 72,00 de juros. Com esse exemplo, verifica-se que no cálculo de juros simples, os juros são iguais, pois ele sempre será acrescentado ao capital inicial.

Obs.:

- Os períodos sempre devem estar na mesma unidade de tempo da taxa de juros: **Taxa de Juros** = 6% ao mês (a.m.) **Número de Períodos**= 6 meses
- Caso contrário, é preciso ajustar os elementos. Veja:

Taxa de Juros = 0,06% ao semestre (a.s.)

Número de Períodos = 3 anos → 6 semestres

- No mercado financeiro, a taxa de juros sempre é dada na forma percentual, mas para a realização dos cálculos é preciso transformar a taxa em fracionária. Veja o quadro:

Valor Percentual	Valor Fracionário
30%	30/100 = 0,30
1%	1/100 = 0,10
0,2%	0,2/100 = 0,002

b) Qual é o juro exato de um capital de R$ 20.000, aplicado por 40 dias, à taxa de 30% ao ano?

Dados encontrados:

C= R$ 20.000 i = 30 %a.a. t= 40 dias J = ?

Conversão da taxa de juros:

30% → 30/100 → 0,3

J = C. i. t / 365 → J = R$ 20.000 x 0,3 x 40 / 365 → J = R$ 240.000 / 365 → J = R$ 657,53

c) Descubra o montante do capital aplicado de R$ 2.600 durante um ano à taxa simples de 55% a.a.

Solução:

C = R$ 2.600   i = 55%a.a.   t= 1 ano   J = ?

Conversão da taxa de juros:

55% → 55/100 → 0,55

J = C. i. t → J = 2.600 x 0,55 x 1 → J = 1.430,00

M = C + J → M = R$ 2.600 + R$ 1.430 → M = R$ 4.030,00

d) Qual é o montante da aplicação, com juros simples, de R$ 1500,00 em um investimento com rentabilidade de 7% ao mês durante 12 meses?

Solução:

Em primeiro lugar, observe que o capital investido é de R$ 1500,00, a taxa de juros é de 7% ao mês e que o tempo de investimento é de 12 meses. Observe também que, para calcular o montante, precisamos conhecer os juros e o capital. Para resolver esse problema, primeiro temos que calcular os **juros** praticados nesse investimento. Substituindo os dados na fórmula dos juros, teremos:

$J = C \cdot i \cdot t$

$J = 1500 \cdot 7\% \cdot 12$

Lembre-se de que 7% = 7/100 = 0,07.

$J = 1500 \cdot 0,07 \cdot 12$

$J = 105 \cdot 12$

$J = 1260$

Agora o cálculo do montante:

$M = J + C$

$M = 1260 + 1500$

$M = 2760$

Assim, o montante desse investimento é de R$ 2760,00.

e) Uma pessoa aplicou o capital de R$ 1.200,00 a uma taxa de 2% ao mês durante 14 meses, no regime de juros simples. Determine os juros e o montante dessa aplicação.

Solução:

Capital (C) = R$ 1.200,00 Tempo (t) = 14 meses Taxa (i) = 2% ao mês = 2/100 = 0,02

Fórmula dos juros simples

$J = C . i . t$

$J = 1200 .0,02 .14$

$J = 336$

Montante

$M = C + J$

$M = 1200 + 336$

$M = 1536$

Resposta: O valor dos juros da aplicação é de R$ 336,00 e o montante a ser resgatado é de R$ 1.536,00.

f) Um capital aplicado a juros simples durante 2 anos, sob taxa de juros de 5% ao mês, gerou um montante de R$ 26.950,00. Determine o valor do capital aplicado.

Solução:

Montante (M) = R$ 26.950,00 Tempo (t) = 2 anos = 24 meses

Taxa (i) = 5% ao mês = 5/100 = 0,05

Para determinarmos o capital precisamos fazer a seguinte adaptação:

$M = C + J$
$J = M – C$

Substituindo na fórmula $J = C * i * t$, temos:

$M – C = C . i . t$
$26950 – C = C . 0,05 * 24$
$26950 – C = C . 1,2$
$26950 = 1,2C + C$
$26950 = 2,2C$
$C = 26950/2,2$
$C = 12250$

Resposta: Portanto, o capital aplicado foi de R$ 12250,00.

g) Um investidor aplicou a quantia de R$ 500,00 em um fundo de investimento que opera no regime de juros simples. Após 6 meses o investidor verificou que o montante era de R$ 560,00. Qual a taxa de juros desse fundo de investimento?
Solução:

Capital (C) = R$ 500,00
Montante (M) = R$ 560,00
Tempo (t) = 6 meses

Calculando os juros da aplicação
$J = M – C$
$J = 560 – 500$
$J = 60$

Aplicando a fórmula $J = C . i . t$

$60 = 500 . i . 6$
$60 = 3000 . i$
$i = 60/3000$
$i = 0,02$ que corresponde a 2%.

Resposta: A taxa de juros do fundo de investimentos é igual a 2%.

h) **(UF–PI)** Uma quantia foi aplicada a juros simples de 6% ao mês, durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R$ 234,00. Qual o valor da quantia aplicada inicialmente?
Solução:

1ª aplicação
Taxa (i) = 6% ao mês = 0,06 Tempo (t) = 5 meses

$J = C . i . t$
$J = C . 0,06 . 5$
$J = 0,3*C$

$M = C + J$
$M = C + 0,3C$
$M = 1,3C$

2º aplicação
Capital (C) = 1,3C Taxa (i) = 4% ao mês = 0,04 Tempo (t) = 5 meses

O capital da 2º aplicação será o montante da 1º. Observe:
$J = C . i . t$

J = 1,3C . 0,04 . 5
J = 0,26C

M = C + J
234 = 1,3C + 0,26C
234 = 1,56C
C = 234 / 1,56
C = 150

Resposta: Portanto, o capital inicial é de R$ 150,00.

i) Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado por cinco meses, a juros simples. Calcule o valor a ser resgatado no final deste período à taxa de 4 % a.m.

Solução:

C= 10.000 t= 5 meses i = 4% ao mês

Valor resgatado são o capital mais os juros do período, ou seja, o montante. Primeiramente podemos calcular os juros:

J = C.i.t => J = 10.000 x 5 x 0,04 = R$ 2.000,00

Como M = J + C, o valor resgatado será: M = 2.000 + 10.000 = R$ 12.000,00

j) Um capital de $ 25.000,00, aplicado durante sete meses, rende juros de $ 7.875,00. Determinar a taxa mensal correspondente.

Solução:

C = 25.000,00 J = 7.875,00 t = 7 meses i = ?

Sabendo que J = C.i.t, temos que a taxa i = J/(C.t) Substituindo os valores acima na equação temos: i = 7875 / (25000 x 7)

Resultando i = 0,045 para dar a resposta em porcentagem basta multiplicar por 100

Taxa de 4,5% ao mês (devido o prazo usado estar em mês).

Variações da Equação Básica: J = C.i.t

$$C = \frac{J}{t} \quad \text{e} \quad i = \frac{J}{C.i} \quad \text{e} \quad t = \frac{J}{C.i}$$

2- **Taxas Proporcionais**

Duas taxas são proporcionais quando seus valores formam uma proporção com os tempos a elas referidos, reduzidos à mesma unidade. Ou seja, duas taxas de juros são consideradas proporcionais quando possuem períodos de capitalização diferente e se aplicadas sobre um mesmo montante inicial produzem um mesmo valor final.

As taxas de juros proporcionais são aquelas aplicadas a capitalização simples (juros simples) em que a divisão de uma taxa por períodos menores irá apresentar dentro da soma dos períodos a mesma soma.

Simplificando, para a obtenção de uma taxa mensal de um investimento que rende 10% ao ano, simplesmente dividimos os 10% pelos 12 meses verificando então uma taxa proporcional de 0,833% ao mês.

Importante lembrar que as taxas de juros proporcionais são aplicadas somente a capitalização ou juros simples (na capitalização composta é utilizada a taxa equivalente). Para a obtenção da taxa de juros proporcional é necessário apenas realizarmos a divisão pelo período que precisamos converter.

Exemplos:

1) Uma taxa de capitalização simples de 12 % ao ano é equivalente a 1% ao mês. Taxa anual 12% / 12 Meses = 1% ao mês.

2) Calcular a taxa mensal proporcional de juros de

a) 14,4% ao ano.

$$\frac{14{,}4\%}{12} = 1{,}2\%\ am$$

b) 6,8% ao quadrimestre.

$$\frac{6{,}8\%}{4} = 1{,}7\%\ am$$

c) 11,4% ao semestre.

$$\frac{11{,}4\%}{6} = 1{,}9\%\ am$$

d) 110,4% ao ano.

$$\frac{110{,}4\%}{12} = 9{,}2\%\ am$$

e) 54,72% ao biênio.

$$\frac{54,72\%}{24} = 2,28\%\ am$$

3) Calcular a taxa trimestral proporcional a juros de

a) 120% ao ano;

$$\frac{120\%}{12} \times 3 = 30\%\ at$$

b) 3,2% ao quadrimestre.

$$\frac{3,2\%}{4} \times 3 = 2,4\%\ at$$

c) 1,5% ao mês.

$$1,5\% \times 3 = 4,5\%\ at$$

4) Determinar a taxa de juros simples anual proporcional às seguintes taxas

a) 2,5% ao mês.

2,5% = 2,5/100 = 0,025

0,025 x 12 = 0,3 x 100 = 30% a.a.

b) 56% ao quadrimestre.

$$\frac{56\%}{4} \times 12 = 168\%\ aa$$

c) 12,5% para 5 meses.

$$\frac{12,5\%}{5} \times 12 = 30\%\ aa$$

4) Calcular o montante de R$ 85.000,00 aplicado por

a) 7 meses à taxa linear de 2,5% ao mês.

Utilizando a fórmula: J = C . i . t

$$J = R\$85.000,00 \times 0,025 \times 7 = R\$14.875,00$$

$$M = R\$85.000,00 + R\$14.875,00 = R\$99.875,00$$

Pode-se também usar a fórmula de montante.

M = C + C . i . t → M = C (1 + i.t)

$M = R\$85.000,00\,(1 + 0,025 \times 7) = R\$99.875,00$

b) 9 meses à taxa linear de 11,6% ao semestre;

9/6 = 1,5 semestre

M = C + C . i . t → M = C (1 + i.t)

$M = R\$85.000,00\,(1 + 0,116 \times 1,5) = R\$99.790,00$

c) 1 ano e 5 meses à taxa linear de 21% ao ano

1 ano e 5 meses = 17 meses.

i=21/12=1,75% am

M = C + C . i . t → M = C (1 + i.t)

$M = R\$85.000,00\,(1 + 0,0175 \times 17) = R\$110.287,50$

5- Um capital de R$2400,00 é aplicado durante 10 meses, à taxa de 25% ao ano, pelo regime de juros simples. Determine o juro obtido.

Solução:

C= 2400 t = 10 meses i = 25% a.a. = 0,25 a.a.

Como o tempo é dado em meses e a taxa é dada ao ano, antes de aplicarmos a fórmula devemos determinar a taxa mensal proporcional à dada.

i = 0,25 a.a. = (0,25 : 12) a. m. = 0,25/12 a.m.

Logo: J = C . i. t → J = 2400 x 0,25/12 x 10 → J = 500.

Resposta: O juro é de R$ 500,00.

3- **Taxas Equivalentes**

Duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo período, produzem o mesmo juro.

As taxas equivalentes irão produzir um mesmo montante que a outra operação, porém com períodos de capitalização diferente da taxa original. Por exemplo, o investimento que rende 10% ao ano, tem uma taxa equivalente de 8,26% a.m.

Observação**:** Quando tratamos de Juros Simples ou Capitalização Simples, a Taxa Proporcional ou Taxa Equivalente é indiferente.

A taxa equivalente não é um tipo de taxa de juros é apenas uma forma de operacionalizar as taxas quando os prazos que se referem às taxas não coincidem com os prazos da operação financeira. Diante de tal situação, as taxas serão convertidas para os prazos da operação para que fiquem uniformes com relação ao tempo. Essa conversão é feita através de um processo de equivalência.

A Matemática Financeira diz que duas ou mais taxas são equivalentes quando, aplicadas sobre um mesmo capital, pelo mesmo período de tempo, produzimos o mesmo montante. Tal conceito pode ser aplicado tanto no regime de juros simples como no regime de juros compostos.

A conceituação de equivalência de taxas estabelece que duas taxas referentes a períodos distintos de capitalização são equivalentes quando produzem o mesmo montante no final de determinado tempo, pela aplicação de um capital de mesmo valor.

O conceito de taxas equivalentes é válido para os dois regimes de capitalização existentes, porém o que os diferencia é com relação a aplicação, da metodologia de cálculo.

Diferentemente das taxas de juros proporcional, as taxas de juros equivalentes possuem taxas diferentes em períodos de tempo diferentes. O cálculo da taxa de juros equivalente é utilizado na capitalização composta.

Exemplo:

Calcular o juro produzido pelo capital de R$2000,00

- à taxa de 4% ao mês, durante 6 meses.
- à taxa de 12% ao trimestre, durante 2 trimestres.

Solução:

No primeiro caso, temos:

C= 2000 t= 6 meses i = 4% a.m. = 0,04 a.m.

Logo:

$J = c.i.t \rightarrow J = 2000 \times 0,04 \times 6 \rightarrow j = 480$

Resposta: Isto é, o juro produzido é de R$480,00.

No segundo caso, temos:

C= 2000 t= 2 trimestres i = 12% a.t. = 0,12 a.t.

Logo:

$J = c.i.t \rightarrow J = 2000 \times 0,12 \times 2 \rightarrow j = 480$

Resposta: Isto é, o juro produzido é de R$480,00.

Como os juros produzidos são iguais, podemos dizer que 4% a.m. e 12% a.t. são taxas equivalentes.

4-**Diferença entre a Taxas Equivalentes e Taxas Proporcionais**

O que são as Taxas Proporcionais?

Duas taxas de juros serão proporcionais quando, expressas em unidades de tempo distintas, incidindo sobre um mesmo capital inicial, por um mesmo período ou prazo, geram o mesmo montante (ou valor futuro), considerando o regime de capitalização simples.

Vejamos um exemplo: a taxa de 3% a.m. será proporcional à taxa de 36% a.a. (12×3%=36%).

Veja que proporcionalidade de taxas aplica-se somente aos juros simples (capitalização simples) com taxas de tempos diferentes e não aos juros compostos (capitalização composta).

O que são Taxas Equivalentes ?

Duas taxas de juros, expressas em unidades de tempo distintas, serão equivalentes quando, incidindo sobre um mesmo capital inicial, por um mesmo prazo, geram o mesmo valor futuro (ou montante), sempre considerando o regime de capitalização composta.

CAPÍTULO 8 – DESCONTOS SIMPLES

1-Introdução:

Na matemática financeira o desconto é a antecipação de valores a receber. Existem dois tipos principais de desconto: desconto simples e desconto composto. Dentro do desconto simples, existem dois tipos de desconto simples: comercial e racional.

Ao contrair uma dívida a ser pago no futuro, é muito comum o devedor oferecer ao credor um documento denominado título, que é o comprovante dessa operação.

De posse do título, que é usado para formalizar uma dívida que não será paga imediatamente, mas dentro de um prazo estipulado, o credor poderá negociar a antecipação de seu pagamento através de um banco.

Além disso, todo título de crédito tem uma data de vencimento; porém, o devedor pode resgatá-lo antecipadamente, obtendo com isso um abatimento denominado desconto. O desconto é uma das mais comuns aplicações da regra de juro.

Os títulos de crédito mais utilizados em operações financeiras são:

- **Nota promissória**: título que comprova uma aplicação com vencimento determinado. Este produto é muito utilizado entre pessoas físicas e ou pessoas físicas e instituições financeiras credenciadas.
- **Duplicata**: papel emitido por pessoas jurídicas contra clientes físicos ou jurídicos, especificando vendas de mercadorias com prazo ou prestação de serviços a serem pagos mediante contrato firmado entre as partes.
- **Letra de câmbio**: como a promissória, é um título que comprova uma aplicação com estabelecimento prévio do vencimento. No caso da letra, o título ao portador somente é emitido por uma instituição financeira credenciada.

Para descontar um título, deve-se verificar:

- **Dia do vencimento** é o dia fixado no título para o pagamento (ou recebimento).Ou seja, o dia estabelecido para vencimento do título.
- **Valor nominal** é o valor indicado no título (importância a ser paga no dia do vencimento). Ou seja, valor mostrado no título e que deve ser pago no dia do vencimento.
- **Valor atual** é o líquido pago (ou recebido) antes do vencimento. Ou seja, valor a ser pago ou recebido em data anterior ao vencimento, comumente efetuado com desconto.
- **Tempo ou prazo** é o número de dias compreendido entre o dia em que se negocia o título e o seu vencimento, incluindo o primeiro e não o último, ou então, incluindo o último e não o primeiro. Ou seja, diferença entre o dia do vencimento e o dia da negociação. Essa diferença costuma ser definida em dias.

Obs.: Desconto é a quantia a ser abatida do valor nominal, isto é, a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

O desconto pode ser feito considerando-se como capital o valor nominal ou o valor atual. No primeiro caso, é denominado desconto comercial; no segundo, desconto racional.

Exemplo de desconto da aplicação.

Imagine que você é um comerciante e, ao vender uma mercadoria, recebe um cheque de R$1.000,00 com 'bom para' daqui a 90 dias. Devido a necessidade de capital de giro para comprar mais mercadorias você precisa de dinheiro agora, então a solução é descontar (antecipar) o cheque. O mais comum é procurar um banco que vai pegar o cheque como garantia e te adiantar R$ 800,00, por exemplo. Essa situação define uma operação de desconto de cheque.

Fórmula Geral do Desconto

Essa fórmula é bem simples e intuitiva, mas muito importante. Sua utilidade é ampla e serve tanto para o desconto simples quanto para o desconto composto.

$$D = N - A$$

Legenda:

D: desconto N: valor nominal ou valor da face A: valor atual ou valor antecipado

2-Desconto Simples Comercial

O desconto simples comercial, também conhecido como **desconto bancário** ou **desconto por fora**, é caracterizado por ser calculado com base no valor nominal do documento a ser descontado. A fórmula do desconto simples é: $D_c = N \times i \times t$

Outra fórmula importante sobre desconto é a fórmula do valor atual, mas com a fórmula anterior já é o suficiente para resolver os exercícios de desconto simples.

$$A = N(1 - i \times t)$$

Legenda:
Dc: desconto comercial N: valor nominal ou valor de face
i: taxa de descontocomercial t: períodos de antecipação
A: valor atual ou valor antecipado

3-Desconto Simples Racional

O desconto simples racional, também conhecido como **desconto verdadeiro** e **desconto por dentro**, é caracterizado por ser calculado com base no valor atual do documento descontado. A fórmula do desconto racional é: $D_R = A \times i \times t$

Pode acontecer de o exercício pedir o valor do desconto e não informar o valor atual, então faz necessário a fórmula do valor atual no desconto simples racional.

$$A = \frac{N}{(1 + i \times t)}$$

OBS: a diferença entre a fórmula do desconto simples racional e o desconto simples comercial é que na racional multiplicamos com o valor atual (A) e na comercial multiplicamos com o valor nominal (N).

Exercícios Resolvidos

01 – Um boleto de R$2.500,00 com vencimento para daqui a 3 meses foi antecipado com taxa de desconto simples comercial de 2%a.m. Calcule o valor do desconto e o valor atual.

Solução: Nesse exercício todos os dados necessários para calcular o desconto diretamente pela fórmula foram dados: valor nominal, taxa de desconto e o prazo. Foi informado também que o desconto é comercial. Vamos aplicar a fórmula:

$$D_c = N \times i \times t$$

$$D_c = 2500 \times 0{,}02 \times 3$$

$$D_c = 150$$

Calculamos que o desconto foi de R$150,00. Agora vamos calcular o valor atual utilizando a fórmula geral do desconto.

$$D = N - A$$

$$150 = 2500 - A$$

$$A = 2500 - 150$$

$A = 2350$ O valor atual (valor adiantado) foi de R$2.350,00.

02 – Um comerciante recebeu um cheque para daqui a 4 meses no valor de R$10.000,00 como pagamento . Como precisa de dinheiro imediatamente, ele foi a um banco para descontar o cheque. A taxa mensal de desconto é de 3,2%. Quanto o comerciante conseguiu antecipar e qual foi o valor do desconto? Considere a modalidade de desconto simples racional.

Solução: foi dado o valor nominal do cheque, o prazo e a taxa. Nesse caso, vamos utilizar a fórmula do valor atual racional.

$$A = \frac{N}{(1 + i \times t)}$$

$$A = \frac{10000}{(1 + 0{,}032 \times 4)}$$

$$A = \frac{10000}{1{,}128}$$

$$A = 8865{,}24$$

O valor atual (antecipado) é R$8.865,24. Vamos usar a fórmula geral do desconto para calcular o valor do desconto.

$$D = N - A$$

$$D = 10000 - 8865{,}24$$

$$D = 1134{,}76$$

Portanto o valor do desconto é R$1.134,76.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1- Qual é o desconto que deverá incidir sobre um título de R$750,00, pago 2 meses e 10 dias antes do vencimento, com uma taxa de 5% ao mês? Resposta: R$87,50.

2- Um título no valor de R$1200,00, pago 5 meses antes do vencimento ficou reduzido a R$900,00. Qual foi a taxa mensal utilizada? Resposta: 5%

3- Calcular o desconto por dentro de um título de R$6864,00, a uma taxa de 12% ao mês, pago 1 mês e 6 dias antes do vencimento. Resposta: R$864,00.

4- Calcular a taxa a ser aplicada, num desconto por dentro, em uma duplicata de R$1200,00, de modo que dois meses e meio antes do vencimento ela se reduza a R$1000,00. Resposta: 8 % ao mês.

Centro Científico Conhecer

Avaliação

Esta avaliação corresponde a 100% da nota do primeiro módulo.

Cursista: ____

1ª Questão:

O preço de um objeto está tabelado em R$2 000,00. Por causa de uma promoção, esse objeto foi colocado à venda por R$1 900,00. Determinar a porcentagem que relaciona o desconto com o preço de tabela.

2ª Questão:

Dividir 720 em partes diretamente proporcionais a 4,6 e 8.

3ª Questão:

Três sócios sofreram um prejuízo de R$14 400,00. Os três entraram para a sociedade com o mesmo capital, ficando o primeiro durante 11 meses, o segundo 12 e o terceiro 13 meses. Qual foi o prejuízo de cada um?

4ª Questão:

A média aritmética dos 100 números de um conjunto é 56. Retirando-se os números 48 e 64 do conjunto, a média aritmética dos números restantes será

A)28 B) 38 C)56 D) 48,5 E) nda

5ª Questão:

Na fabricação de 20 camisas, 8 máquinas gastam 4 horas. Para produzir 15 camisas, 4 máquinas gastam quantas horas?

6ª Questão:

Numa fábrica, 12 operários trabalhando 8 horas por dia conseguem fazer 864 caixas de papelão. Quantas caixas serão feitas por 15 operários que trabalham 10 horas por dia?

7ª Questão:

Carlos pediu aumento salarial na empresa em que trabalhava, alegando que um simples reajuste de 7,5% não cobriria suas reais necessidades. Na ocasião, seu salário era de R$2850,00 e sua proposta foi uma correção de 9,0%. No final do mês, ele recebeu R$3092,25. Calculando qual o índice de correção aplicado pela empresa, responda se o pedido foi aceito.

8ª Questão:

Uma fatura de R$5 000,00 sofrerá descontos sucessivos de 5% e 8%. Por quanto essa fatura será liquidada?

9ª Questão:

A média aritmética de quatro números é 19. Três desses números são 14,11 e 17. Qual é o quarto número?

10ª Questão:

Numa feira, um determinado produto estava sendo vendido assim:

- 6 quilos: R$5,00 cada kg.
- 10 quilos: R$4,00 cada kg.
- 24 quilos: R$3,00 cada kg.

Qual é o preço médio do quilo do produto?