CURSO DE MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA

MÓDULO 2

O estudo e o desenvolvimento da Matemática Financeira estão vinculados ao sistema econômico. O mundo, hoje, está de alguma forma, ligado à economia de mercado, sendo importante ter noção sobre esse estudo matemático para melhor compreender os mecanismos das operações financeiras.

CAPÍTULO 1 – LOGARITMOS

1- Introdução

A origem dos logaritmos remonta ao século XVII e, ao que consta, eles tinham como função específica facilitar os cálculos aritméticos complicados que frequentemente apareciam nas operações comerciais.

O estudo do logaritmo surgiu, sobretudo, como um auxílio na solução de equações exponenciais. Ele está presente, também, em modelos matemáticos utilizados em várias áreas. Em Química, por exemplo, ele está presente no cálculo de pH e pOH. A escala Richter, por exemplo, é uma escala logarítmica arbitrária, de base 10, utilizada para quantificar a magnitude de um terremoto.

2-Definição

Sendo a e b números reais positivos, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente em que a deve ser elevado de modo que a potência obtida de base a seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Com $a>0$, $a\neq 1$ e $b>0$

Assim, o logaritmo nada mais é que um expoente. Dizemos que "a" é a base do logaritmo, "b" é o logaritmando e "x" é o logaritmo.

Exemplo: $\log_2 16 = 4, pois\ 2^4 = 16$

3- **Definições**

I) O logaritmo cujo o logaritmando é igual a 1 e a base é qualquer, é igual a zero:

$$\log_a 1 = 0, pois\ a^0 = 1$$

II) O logaritmo cujo a base e o logaritmando são iguais é igual a um:

$$\log_a a = 1, pois\ a^1 = a$$

III) A potência de base "a" e expoente $\log_a b$ é igual a b:

$$a^{\log_a b} = b$$

IV) Dois logaritmos são iguais, numa mesma base, se os logaritmandos são iguais:

$$\log_a b = \log_a c \ \Leftrightarrow \mathrm{b} = \mathrm{c}$$

4-Propriedade dos logaritmos

I. Logaritmo do produto

O logaritmo do produto de dois fatores "a" e "b", em qualquer base "c", é igual à soma dos logaritmos de cada um desses fatores.

Se c > 0 e $c \neq 1$, a > 0, b > 0, então:

$$\log_c(a.b) = \log_c a + \log_c b$$

Exemplo:

$$\log_3(9.27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$$

II. Logaritmo do quociente

O logaritmo do quociente de dois fatores a e b, em qualquer base c, é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses fatores.

Se c > 0 e $c \neq 1$, a > 0, b > 0, então:

$$\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

Exemplo:

$$\log_3(\frac{27}{9}) = \log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$$

III. Logaritmo da potência

O logaritmo de uma potência, em qualquer base c, é igual ao produto entre o expoente da potência e o logaritmo cujo logaritmando é a base da potência.

Se a > 0 e $a \neq 1$, b > 0, $c \in$R, então:

$$\log_a b^c = c.\log_a b$$

Exemplo:

$$\log_3 9^5 = 5.\log_3 9 = 5\,.\,2 = 10$$

IV. Logaritmo de uma raiz

O logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é o produto entre o inverso do índice da raiz pelo logaritmo cujo o logaritmando é o radicando:

Se a > 0 e $a \neq 1$, b > 0, $n \in$N∗, então:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.\log_a b$$

Exemplo:

$$\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.\log_5 25 = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}$$

5-Mudança de Base

Algumas vezes, os logaritmos com bases diferentes precisam ser transformados para outra base, de forma que ela seja a mesma para ambos.

Se **a**, **b** e **c** são números reais positivos, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, a \neq 1 \; e \; c \neq 1$$

Exemplo:

$\log_3 5$ transformando para a base 2 fica:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

Se a e b são reais positivos e quisermos transformar $\log_a b =$ para a base b, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}\ , a\ \neq 1\ e\ b\ \neq 1$$

Exemplo:

$$\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3}$$

Se a e b são reais positivos, temos que:

Exercícios Resolvidos

a) $\boldsymbol{\log_9 27}$

Solução:

$$\boldsymbol{\log_9 27 = x\ \rightarrow 9^x = 27 \rightarrow 3^{(2x)} = 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}}$$

b) O logaritmo de 243 numa certa base é 5.Qual é a base?

Solução:

$$\log_x 243 = 5 \rightarrow x^5 = 243\ \rightarrow x = 3$$

Resposta: A base é 3.

c) Dados log2= 0,301 e log3= 0,477, calcular log 162.

Solução:

Log162 = log (2.3^4) = log 2 + log3^4 = log 2 + 4. log3 = 0,301 + 4. 0,477 = 2,209

d) Encontre um número x > 0 tal que $\log_5 x + \log_5 2 = 2$.

Solução:

Utilizando a propriedade do logaritmo do produto ao contrário, teremos:

$$\log_5(x.2) = 2 \rightarrow x.2 = 5^2 \rightarrow 2x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{2}$$

e) Resolver a equação: $\log_4 x = \log_2 3$

Solução:

$$\log_4 x = \log_2 3 \rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 3 \rightarrow \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 3 \rightarrow \log_2 x = 2.\log_2 3$$
$$\rightarrow \log_2 x = \log_2 3^2 \rightarrow \log_2 x = \log_2 9 \rightarrow x = 9$$

6-Mantissa

Os logaritmos decimais de dois números que diferem entre si somente pela posição da vírgula, têm em comum a mesma mantissa. Esta propriedade torna possível a criação de uma tabela para a obtenção da mantissa de um logaritmo decimal.

Os logaritmos na base 10 podem ser expressos sem se explicitar a base, assim o $\log_{10} 1000$ pode ser expresso simplesmente por log 1000.

A característica de um logaritmo decimal pode facilmente ser obtida. A característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade.

Exemplo:

Calcular o log 50.

Solução:

O log 50 é um número decimal que pode ser separado em duas partes. Uma parte inteira e outra decimal. À parte inteira damos o nome de característica, à parte decimal denominamos mantissa. A característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade.
O número 50 possui dois algarismos na parte inteira, por isto a sua característica é igual a 1. O logaritmo de 50, na base 10, é aproximadamente 1,698970.

Mais abaixo você encontra uma tábua de logaritmos decimais, que na verdade trata-se de uma tabela contendo não logaritmos, mas somente mantissas de logaritmos na base dez. No entanto você pode interpretar esta tábua como sendo a tabela dos logaritmos de 1,00 a 9,99, cujas características (0) foram omitidas.

Para obtermos a mantissa do log 0,000504 através da tabela, vamos transformar o número 0,000504 em um número de três algarismos, entre 1,00 e 9,99, simplesmente mudando a posição da vírgula para a direita do primeiro algarismo diferente de zero: $0{,}000504 \Rightarrow 5{,}04$

Agora vamos separar o 5,04 em duas partes. O terceiro algarismo (4) será utilizado para identificarmos a coluna na tabela e o número 50, formado pela outra parte (5,0) sem a vírgula, será utilizado para identificar a linha da mantissa na tabela.
Procurando na tabela vemos que no cruzamento da linha 50 com a coluna 4 temos exatamente a mantissa 702431. Note na linha 50 estão as mantissas dos números de três algarismos de 5,00 a 5,09. A mantissa do número 5,04 está justamente na coluna 4. Esta é a mantissa do log 0,000504 e de qualquer outro número que difira de 0,000504 apenas pela posição da vírgula, como 0,0504, 5,04, 504, 50400, ... Obviamente embora possuam a mesma mantissa, cada um destes cinco números possui uma característica distinta dos demais, respectivamente $\bar{4}$, $\bar{2}$, 0, 2 e 4.

Exemplos:

a)Qual é a mantissa do log 2?

Solução:

Estamos procurando pelo log 2, ou para facilitar, pelo log 2,00 que possui três algarismos. Pesquisaremos na linha 20, pois é nesta linha que estão as mantissas dos números de três algarismos de 2,00 a 2,09. Faremos a busca na coluna 0, pois este é o terceiro algarismo de 2,00. Então no cruzamento da linha 20 com a coluna 0 temos que a mantissa do log 2 é igual a do 301030.

b) Qual é a mantissa do log 123?

Solução:

Já que esta tábua se refere à mantissa dos logaritmos de 1,00 a 9,99, e que 1,23 e 123 diferem entre si apenas pela posição da vírgula, então podemos indistintamente procurar pela mantissa do logaritmo de 1,23 ou 123. Por conveniência vamos procurar pela mantissa do logaritmo de 1,23. Pesquisaremos na linha 12 onde estão as mantissas dos números de três algarismos de 1,20 a 1,29. Como o terceiro algarismo de 1,23 é o 3, pegaremos a mantissa no cruzamento da linha 12 com a coluna 3. Então a mantissa do log 123 é 089905.

c) Qual é a mantissa do log 51?

Solução:

Sem segredo, vamos procurar pela mantissa do log 5,10 que se encontra no cruzamento da linha 51 com a coluna 0, que é 707570. Vale lembrar que log 5,10 = 2,707570 e log 51 = 1,707570. Apenas para fixar os conceitos, na linha 51 se encontram as mantissas dos números de três algarismos de 5,10 a 5,19.

d) Qual é a mantissa do log 17,7?

Solução:

Também é simples, procuremos pela mantissa do log 1,77 que se encontra no cruzamento da linha 17 com a coluna 7, que é 247973, a mesma do log 17,7.

Referências:http://www.matematicadidatica.com.br/LogaritmosDecimais.aspx

http://www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogaritmosDecimais.aspx

7- Tábua de Logaritmos Decimais

Por volta de 1615, o matemático Henry Briggs construiu a primeira tabela de logaritmos de base 10, isto é, calculou valores de x de tal forma que 10^x fosse igual a qualquer número desejado.

Exemplos:

log3 = 0,477

log30 = log (3 . 10) = log 3 + log 10 = 0,477 + 1 = 1,477

log300 = log (3 . 100) = log 3 + log 100 = 0,477 + 2 = 2,477

log3000 = log (3 . 1000) = log 3 + log 1000 = 0,477 +3 = 3,477

Esta tabela possui uma precisão de seis casas decimais. Nos casos em que a sétima casa decimal é igual ou superior a 5, a mantissa foi arredondada somando-se 1 ao sexto algarismo.

Tábua de Logaritmos Decimais (Mantissas)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898
29	462398	463893	465383	466868	468347	469822	471292	472756	474216	475671
30	477121	478566	480007	481443	482874	484300	485721	487138	488551	489958
31	491362	492760	494155	495544	496930	498311	499687	501059	502427	503791
32	505150	506505	507856	509203	510545	511883	513218	514548	515874	517196
33	518514	519828	521138	522444	523746	525045	526339	527630	528917	530200
34	531479	532754	534026	535294	536558	537819	539076	540329	541579	542825
35	544068	545307	546543	547775	549003	550228	551450	552668	553883	555094
36	556303	557507	558709	559907	561101	562293	563481	564666	565848	567026
37	568202	569374	570543	571709	572872	574031	575188	576341	577492	578639
38	579784	580925	582063	583199	584331	585461	586587	587711	588832	589950
39	591065	592177	593286	594393	595496	596597	597695	598791	599883	600973
40	602060	603144	604226	605305	606381	607455	608526	609594	610660	611723
41	612784	613842	614897	615950	617000	618048	619093	620136	621176	622214
42	623249	624282	625312	626340	627366	628389	629410	630428	631444	632457
43	633468	634477	635484	636488	637490	638489	639486	640481	641474	642465
44	643453	644439	645422	646404	647383	648360	649335	650308	651278	652246
45	653213	654177	655138	656098	657056	658011	658965	659916	660865	661813
46	662758	663701	664642	665581	666518	667453	668386	669317	670246	671173
47	672098	673021	673942	674861	675778	676694	677607	678518	679428	680336
48	681241	682145	683047	683947	684845	685742	686636	687529	688420	689309
49	690196	691081	691965	692847	693727	694605	695482	696356	697229	698101
50	698970	699838	700704	701568	702431	703291	704151	705008	705864	706718
51	707570	708421	709270	710117	710963	711807	712650	713491	714330	715167
52	716003	716838	717671	718502	719331	720159	720986	721811	722634	723456
53	724276	725095	725912	726727	727541	728354	729165	729974	730782	731589
54	732394	733197	733999	734800	735599	736397	737193	737987	738781	739572

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	740363	741152	741939	742725	743510	744293	745075	745855	746634	747412
56	748188	748963	749736	750508	751279	752048	752816	753583	754348	755112
57	755875	756636	757396	758155	758912	759668	760422	761176	761928	762679
58	763428	764176	764923	765669	766413	767156	767898	768638	769377	770115
59	770852	771587	772322	773055	773786	774517	775246	775974	776701	777427
60	778151	778874	779596	780317	781037	781755	782473	783189	783904	784617
61	785330	786041	786751	787460	788168	788875	789581	790285	790988	791691
62	792392	793092	793790	794488	795185	795880	796574	797268	797960	798651
63	799341	800029	800717	801404	802089	802774	803457	804139	804821	805501
64	806180	806858	807535	808211	808886	809560	810233	810904	811575	812245
65	812913	813581	814248	814913	815578	816241	816904	817565	818226	818885
66	819544	820201	820858	821514	822168	822822	823474	824126	824776	825426
67	826075	826723	827369	828015	828660	829304	829947	830589	831230	831870
68	832509	833147	833784	834421	835056	835691	836324	836957	837588	838219
69	838849	839478	840106	840733	841359	841985	842609	843233	843855	844477
70	845098	845718	846337	846955	847573	848189	848805	849419	850033	850646
71	851258	851870	852480	853090	853698	854306	854913	855519	856124	856729
72	857332	857935	858537	859138	859739	860338	860937	861534	862131	862728
73	863323	863917	864511	865104	865696	866287	866878	867467	868056	868644
74	869232	869818	870404	870989	871573	872156	872739	873321	873902	874482
75	875061	875640	876218	876795	877371	877947	878522	879096	879669	880242
76	880814	881385	881955	882525	883093	883661	884229	884795	885361	885926
77	886491	887054	887617	888179	888741	889302	889862	890421	890980	891537
78	892095	892651	893207	893762	894316	894870	895423	895975	896526	897077
79	897627	898176	898725	899273	899821	900367	900913	901458	902003	902547
80	903090	903633	904174	904716	905256	905796	906335	906874	907411	907949
81	908485	909021	909556	910091	910624	911158	911690	912222	912753	913284
82	913814	914343	914872	915400	915927	916454	916980	917506	918030	918555
83	919078	919601	920123	920645	921166	921686	922206	922725	923244	923762
84	924279	924796	925312	925828	926342	926857	927370	927883	928396	928908
85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565

Exemplos:

a) Utilize a tabela de logaritmos para calcular, aproximadamente, $120^{0,31}$.

Solução:

Chamando $x = 120^{0,31}$ e aplicando logaritmo aos dois lados da igualdade, teremos;

$\log x = \log 120^{0,31} \rightarrow \log x = 0,31 \cdot \log 120$

Usando a tabela para log 120 , vem:

Log x = 0,31 (2 + 0,07918) = 0,31 . 2,07918 = 0,64455

Procurando na tabela o número que tem mantissa 0,64455, encontraremos 441 (valor mais próximo). Como a característica é zero, x deve ser um número entre 10^0 e 10^1, ou 1 e 10. Assim: x = 4,41.

Resposta: $120^{0,31} \cong 4,41$.

b) Um investimento de R$2000,00 é feito de modo que o montante de cada mês é obtido multiplicando-se o montante do mês anterior pelo fator 1,03. Calcule o montante total do investimento após 4 meses e meio . (Utilize a interpolação)

Solução:

$M = 2000 \cdot 1,03^t \rightarrow M = 2000 \cdot 1,03^{4,5} \rightarrow \log M = \log 2000 + 4,5 \cdot \log 1,03 \rightarrow$
$\rightarrow \log M = 3,30103 + 4,5 \cdot 0,012837 \rightarrow \log M = 3,358796$

Interpolando:

357935 228

359835 229

358796 .... ?

Então:

359835 – 357935 .... 229 – 228

358796 – 357935 .... ? - 228

1900 1

861 x

Assim x = 0,4531. Portanto, M = 2284,531 ou M= 2284,53.

Resposta: O montante será de R$2284,53.

8-Obtendo a Mantissa por Interpolação Linear

Aprendemos que podemos obter, a partir da tabela acima, a mantissa do logaritmo de qualquer número real positivo, que após a colocação da vírgula à direita do primeiro algarismo diferente de zero, resulte em um número com até três algarismos, mas como obter a mantissa do log 35,79 por exemplo?

Solução

O log 35,79 é maior que o log 35,7 e menor que o log 35,8.

Como o log 35,7 e o log 35,8 nós temos condição de obter em função da tabela, pois eles têm três algarismos, então através de uma interpolação linear podemos montar a seguinte equação:

$$\frac{x}{\log 35{,}8 - \log 35{,}7} = \frac{35{,}79 - 35{,}7}{35{,}8 - 35{,}7}$$

Recorrendo à tabela e aplicando os conhecimentos adquiridos na série de artigos sobre logaritmos, temos que log 35,7 = 1,552668 e log 35,8 = 1,553883, o que nos permitir calcular o valor de x:

$$\Rightarrow x = 0{,}9 \cdot 0{,}001215 \Rightarrow x = 0{,}0010935$$

Agora temos como calcular aproximadamente o log 35,79 e obtermos a sua mantissa:

$$\log 35{,}79 = \log 35{,}7 + 0{,}0010935 = 1{,}552668 + 0{,}0010935 = 1{,}5537615$$

Como estamos trabalhando com apenas seis casas decimais, podemos arredondar 1,5537615 para 1,553762, então o log 35,79 = 1,553762.

Finalmente, a mantissa do log 35,79, calculada através de interpolação linear é 553762.

9- Obtendo a Característica de um número real maior ou igual a um

A característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade. Como vimos, o número 50 possui dois algarismos na parte inteira, por isto a sua característica é igual a 1. A característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 2, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos.

10-Obtendo a Característica de um número real maior que zero e menor que um

Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que zero e menor que um, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de zero. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que um e maior que zero é negativo. Lembre-se que não existe logaritmo de número negativo.

Exemplo:

Qual é a característica do log 0,000504?

Solução:
Veja que o número 0,000504 possui um zero antes da vírgula e mais três depois dela e antes do primeiro algarismo diferente de zero que é o 5. Por isso, a característica do número 0,000504 é - 4.

11-Logaritmo na Forma Mista ou Preparada

A mantissa aproximada do log 0,000504 é 702431, então podemos dizer que o log 0,000504 = -4 + 0,702431, na forma mista. Veja que na forma mista ou preparada, escrevemos a características e a mantissa como os termos de uma adição. Nesta forma também podemos expressar assim o logaritmo de log 0,000504: $\bar{4},702431$

Note que realizamos um traço sobre a característica negativa, semelhante ao vinculum utilizado na escrita de números romanos, de segmentos, de dízimas, etc.

12-Logaritmo na Forma Negativa

Se você calcular o log 0,000504 em uma calculadora científica irá obter aproximadamente o seguinte valor: $-3,297569$

Note que ele difere do valor considerado anteriormente. Por quê?
Porque anteriormente o log 0,000504 estava representado na sua forma preparada e agora ele está na sua forma negativa. Esta é a forma utilizada pelas calculadoras.

13-Convertendo Logaritmos na Forma Preparada para a Forma Negativa

Para conversão de $\bar{4},702431$em $-3,297569$devemos tratar a característica e a mantissa separadamente. A característica $\bar{4}$passa para -3 simplesmente se somando 1 ao -4 da parte inteira: $\bar{4} \Rightarrow -4 + 1 = -3$

Em relação à mantissa subtraímos de 1 o 0,702431 referente à parte decimal:
$1 - 0,702431 = 0,297569$

O logaritmo resultante na forma negativa será a subtração das novas partes obtidas: $-3 - 0,297569 = -3,297569$

Caso só tenhamos a característica, isto é, a mantissa seja zero, a conversão é mais simples. $\bar{4}$na forma preparada é igual a -4 na forma negativa.

14- Convertendo Logaritmos na Forma Negativa para a Forma Preparada

A conversão de $-3,297569$em $\bar{4},702431$também e realizada se tratando a característica e a mantissa separadamente. Da parte inteira -3 subtraímos 1, que resulta em -4 e escrevemos a característica utilizando o traço sobre este número sem o sinal de negativo: $-3 - 1 = -4 \Rightarrow \bar{4}$

$\bar{4}$ é a característica na forma mista. A mantissa é obtida subtraindo de 1 a parte decimal: $1 - 0{,}297569 = 0{,}702431$

O logaritmo resultante na forma preparada será a junção da característica $\bar{4}$ com a mantissa 702431, ou seja: $\bar{4}{,}702431$. No caso de números inteiros o procedimento é simplificado. Se ao invés de $-3{,}297569$, tivéssemos apenas o inteiro -3, na forma preparada teríamos simplesmente $\bar{3}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1- Dados log 2 = 0,301 e log 3= 0,477, calcule.

a) log 6

b) log 27

c) log (1/16)

d) log (3/2)

e) log 54

f) log $\sqrt{8}$

Respostas: a)0,778 b) 1,431 c) – 1, 204 d) 0,176 e) 1,732 f) 0,452

2- Sabendo que log51 = 1,708, complete a tabela.

x	51	510	5100	51000	510000
log x					

Respostas:

2- Sabendo que log51 = 1,708, complete a tabela.

x	51	510	5100	51000	510000
log x	1,708	2,708	3,708	4,708	5,708

3-Dados log 2= 0,301, calcule log 5 e $\log_2 5$.

Respostas: 0,699; 2,322.

4- Sendo log18=1,255273, calcule log1,8 e log180.

Respostas: 0,255273 e 2,255273.

CAPÍTULO 2 – JUROS COMPOSTOS

1-Introdução

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal (capital inicial) para o cálculo dos juros do período seguinte. Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal.

Juros compostos são a aplicação de juros sobres juros, isto é, os juros compostos são aplicados ao montante de cada período. Eles são muito utilizados pelo sistema financeiro, pois oferecem maior rentabilidade se comparados ao juro simples.

Esse tipo de juros, chamado também de "capitalização acumulada", é muito utilizado nas transações comerciais e financeiras (sejam dívidas, empréstimos ou investimentos).

Para entender melhor veja como fica a aplicação mês a mês dos juros.

Primeiro mês: $M = C\ (1 + i)$

Segundo mês: $M = C\ (1 + i)(1+i)$

Terceiro mês: $M = C\ (1 + i)(1+i)(1+i)$

Quarto mês: $M = C\ (1 + i)(1+i)(1+i)\ (1+i)$

Quinto mês: $M = C\ (1 + i)(1+i)(1+i)\ (1+i)(1+i)$

...

Simplificando, obtemos a fórmula a seguir que representa juros compostos:

$$\boxed{\mathbf{M = C\ .\ (1 + \ i)^t}}$$

M = montante final
i = taxa de juros aplicada
C = capital, principal ou valor inicial
t = tempo total

Obs.:_ A taxa **i** tem que ser expressa na mesma medida de tempo de **t**, ou seja, taxa de juros ao mês para t meses. Para calcularmos apenas os juros basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$$\boxed{\mathbf{J = M - C}}$$

J = juro total
M = montante
C = capital ou valor inicial

Juro composto é aquele que em cada período financeiro, a partir do segundo, é calculado sobre o montante relativo ao período anterior.

Exemplos:

a)Calcule o montante de um capital de R$6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês.

Solução:

C = R$6.000,00   t = 1 ano = 12 meses   i = 3,5 % a.m. = 0,035   M = ?

Usando a fórmula $\mathbf{M=C.(1+i)t}$, obtemos:

$M = 6000.(1+0,035)^{12}$

$M = 6000. (1,035)^{12}$

$M = 6000.1,511 = 9066,41.$

Resposta: Portanto o montante é R$9.066,41.

b) Considere que uma pessoa aplique R$ 500,00 durante 8 meses em um banco que paga 1% de juro ao mês. Qual será o valor ao final da aplicação?

Solução:

A tabela demonstrará mês a mês a movimentação financeira na aplicação do regime de juros compostos.

Mês	Capital (R$)	Juros %	Montante (R$) Capital + Juros
1	500	1% de 500 = 5	505
2	505	1% de 505 = 5,05	510,05
3	510,05	1% de 510,05 = 5,10	515,15
4	515,15	1% de 515,15 = 5,15	520,30
5	520,30	1% de 520,30 = 5,20	525,50
6	525,50	1% de 525,50 = 5,26	530,76
7	530,76	1% de 530,76 = 5,31	536,07
8	536,07	1% de 536,07 = 5,36	541,43

No final do 8º mês, o montante será de R$ 541,43.

c) Qual o montante produzido por um capital de R$ 7.000,00 aplicados a uma taxa de juros mensais de 1,5% durante um ano?

Solução: C: R$ 7.000,00   i: 1,5% ao mês = 1,5/100 = 0,015   t: 1 ano = 12 meses

$M = C \, . \, (1 + i)^t$
$M = 7000 \, .(1 + 0{,}015)^{12}$
$M = 7000 \, . \, (1{,}015)^{12}$
$M = 7000 \, .1{,}195618$
$M = 8369{,}33$

Resposta: O montante é de R$ 8.369,33.

d) Calcule o valor do capital que, aplicado a uma taxa de 2% ao mês, rendeu em 10 meses a quantia de R$ 15.237,43?

Solução:

M: R$ 15.237,43 t: 10 meses i: 2% a.m. = 2/100 = 0,02

$M = C \, .(1 + i)^t$

$15237{,}43 = C \, . \, (1 + 0{,}02)^{10}$

$15237{,}43 = C \, .(1{,}02)^{10}$

$15237{,}43 = C \, .1{,}218994$

$C = 15237{,}43 / 1{,}218994$

$C = 12500{,}00$

Resposta: O capital é de R$ 12.500,00.

e) Qual é a taxa de juros empregada sobre o capital de R$ 8.000,00 durante 12 meses que gerou o montante de R$ 10.145,93?

Solução:

C: R$ 8.000,00 M: R$ 10.145,93 t: 12meses i: ?

$M = C \, . \, (1 + i)^t$

$$10145{,}93 = 8000 * (1+i)^{12}$$

$$\frac{10145{,}93}{8000} = (1+i)^{12}$$

$$(1+i)^{12} = 1{,}268241$$

$$\sqrt[12]{(1+i)^{12}} = \sqrt[12]{1{,}268241}$$

$$1+i = 1{,}02$$

$$i = 1{,}02 - 1$$

$$i = 0{,}02$$

$$i = 2\%$$

Resposta: A taxa de juros da aplicação foi de 2%.

f) Por quanto tempo devo aplicar um capital de R$ 800,00 a uma taxa de juros de 3% ao mês para que produza um montante de R$ 1.444,89?

Solução:

C: R$ 800,00 M: R$ 1.444,89 i: 3% a.m.= 3/100 = 0,03 t: ?

$$1.444,89 = 800 \cdot (1 + 0,03)^t$$
$$1.444,89 = 800 \cdot 1,03^t$$
$$1.444,89/800 = 1,03^t$$
$$1,03^t = 1,806 \text{ (aplicar propriedade dos logaritmos)}$$
$$\log 1,03^t = \log 1,806$$
$$t \cdot \log 1,03 = \log 1,806$$
$$t \cdot 0,013 = 0,257$$
$$t = 0,257/0,013$$
$$t = 20$$

Resposta: O capital deve ser aplicado por 20 meses.

g) Qual o montante produzido por um capital de R$ 2.000,00, aplicado a juros compostos de 2% ao mês, durante um ano?

Solução:
Fórmula para o cálculo de juros compostos $M = C.(1 + i)^t$, em que:

M = montante
C = capital
i = taxa
t = tempo

Dados
M = ?
C = 2000
i = 2% = 2/100 = 0,02
t = 1 ano = 12 meses (pois a taxa é ao mês)

$M = C. (1 + i)^t$
$M = 2000. (1+0,02)^{12}$
M = 2000 x 1,0212
M = 2000 x 1,268242
M = 2.536,48

Resposta: O montante produzido ao final de um ano será de R$ 2.536,48.

h) Qual deve ser o capital que, no sistema de juros compostos, à taxa de 4% ao mês, gera um montante de R$ 12.154,90 ao final de 1 ano e 6 meses?

Solução:

$M = 12.154,90$

$C = ?$

$i = 4\% = 4/100 = 0,04$

$t = 1$ ano e 6 meses = 18 meses

$M = C. (1 + i)^t$

$12.154,90 = C . (1 + 0,04)^{18}$

$12.154,90 = C . 1,04^{18}$

$12.154,90 = C . 2,0258$

$C = 12.154,90 / 2,0258$

$C = 6.000$

Resposta: O capital será de R$ 6.000,00.

i) Calcule o montante de um capital de R$ 12.000,00 aplicado durante 3 anos em um banco que paga no regime de juros compostos uma taxa de 1,5% a.m.

Solução:

$M = ?$ $C = 12.000$ $i = 1,5\% = 1,5/100 = 0,015$ $t = 3$ anos = 36 meses (pois a taxa de juros é mensal)

$M = C. (1 + i)^t$

$M = 12000 . (1 + 0,015)^{36}$

$M = 12000 . 1,015^{36}$

$M = 12000 . 1,70914$

$M = 20.509,68$

Resposta: O montante será de R$ 20.509,68.

j) O capital de R$ 1.500,00, aplicado a juros compostos, rendeu, após 2 meses, juros de R$ 153,75. Qual foi a taxa de juros?

Solução:

$M = 1500 + 153,75 = 1653,75$

$M = C . (1 + i)^t$

$1653,75 = 1500 . (1 + i)^2$

$1653,75 / 1500 = (1 + i)^2$

$(1 + i)^2 = 1,1025$

$\sqrt{(1 + i)^2} = \sqrt{1,1025}$ (use a calculadora para extrair a raiz quadrada de 1,1025)

$1 + i = 1,05$

$i = 1,05 - 1$

$i = 0,05$ ou 5%

Resposta: A taxa de juros empregada foi de 5%.

k) Josias aplicou R$400,00 num investimento que rende 2% a.m. a juros compostos. Determine

i) o montante, ao final de 3 meses.

Solução:

$M = C. (1 + i)^t$

$M = 400 . (1 + 0,02)^3$

$M = 400 . 1,02^3$

$M = 400 . \ 1,061208$

$M \cong 424,48$

Resposta: O montante será de R$ 428,48

ii) o tempo necessário para que o montante seja R$600,00.

M=600 C=400 i= 0,02 t=?

$M = C. (1 + i)^t$

$600 = 400 . (1 + 0,02)^t$

$600 = 400 . 1,02^t$

$\frac{600}{400} = 1,02^t$

$1,5 = 1,02^t$

A determinação do expoente t será feita através de logaritmos:

$\log 1,5 = \log 1,02^t \rightarrow t.\log 1,02 = \log 1,5 \rightarrow t = \frac{log1,5}{log1,02} = \frac{0,1761}{0,0086} \rightarrow t = 20,47\ meses$

O valor obtido, entre 20 e 21 meses, significa que

1º) caso Josias efetue o resgate após o final do 20º mês ou no decorrer do 21º mês, ele não terá o valor desejado, mas apenas $M = 400. (1,02)^{20} = 594,37$.

2º) caso Josias resgate ao final do 21º mês, ele terá disponível o valor de $M = 400. (1,02)^{21} = 606,26$.

Obs.: Em geral, o prazo de resgate de uma aplicação financeira é determinado pelo governo federal. Na maioria das vezes, o prazo é mensal, e o resgate antecipado (antes do vencimento da aplicação) acarreta a perda de juros correspondente àquele mês, cabendo ao poupador sacar apenas o montante acumulado até o mês anterior.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1-Quanto receberá de juros, no fim de um semestre, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R$5.000,00, à taxa de 1% ao mês?

2- Qual deve ser o tempo para que a quantia de R$20 000,00 gere o montante de R$ 21 648,64, quando aplicado à taxa de 2% ao mês, no sistema de juros compostos?

3- Um capital de R$7500,00 aplicado durante 5 meses produziu um montante de R$9500,00. Qual foi a taxa mensal aplicada?

4-Calcule o montante produzido por R$2000,00, aplicados em regime de juro composto a 5% ao mês, durante 2 meses.

5- Uma pessoa toma R$3000,00 emprestados, a juro de 3% ao mês, pelo prazo de 10 meses, com capitalização composta. Qual o montante a ser devolvido?

6- A produção de material para construção cresce à taxa de 27% ao ano. Qual é o tempo necessário para que a produção triplique?

Respostas:

1- M= R$5307,60 J = R$307,60
2- t = 4 meses
3- i = 0,05 = 5%
4- R$2205,00
5- R$4032,00
6- t ≅ 4,6 anos, tempo aproximado de 4 anos e 7 meses.

2-TAXAS PROPORCIONAIS

Duas taxas são proporcionais quando seus valores formam uma proporção com os tempos a elas referidos, reduzidos à mesma unidade. Sendo, então, ia uma taxa anual e i_s, i_t, i_b, i_m i_d taxas, respectivamente, semestral, trimestral, bimestral, mensal e diária, temos:

$$\boldsymbol{i_s = \frac{i_a}{2}\ ;\ i_t = \frac{i_a}{4}\ ;\ i_b = \frac{i_a}{6}\ ;\ i_m = \frac{i_a}{12}\ ;\ i_d = \frac{i_a}{360}}$$

3-TAXAS EQUIVALENTES

Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes, se aplicadas ao mesmo Capital **C** durante o mesmo período de tempo, através de diferentes períodos de capitalização, produzem o mesmo montante final.

Ou seja, taxas equivalentes são aquelas que, referindo-se a períodos de tempo diferentes, fazem que um capital produza o mesmo montante num mesmo tempo.

- Seja o capital **C** aplicado por um ano a uma taxa anual i_a .
- O montante **M** ao final do período de 1 ano será igual a $M = C(1 + i_a)$
- Consideremos agora, o mesmo capital **P** aplicado por 12 meses a uma taxa mensal i_m .
- O montante **M'** ao final do período de 12 meses será igual a $M' = C(1 + i_m)^{12}$.

Pela definição de taxas equivalentes vista acima, deveremos ter **M = M'**.

Portanto, $C(1 + i_a) = C(1 + i_m)^{12}$

Daí concluímos que $\mathbf{1 + i_a = (1 + i_m)^{12}}$

Com esta fórmula podemos calcular a taxa anual equivalente a uma taxa mensal conhecida.

Exemplos:

1 - Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?

Solução:

Em um ano temos dois semestres, então teremos:

$1 + i_a = (1 + i_s)^2 \rightarrow 1 + i_a = 1{,}08^2 \rightarrow i_a = 0{,}1664 = 16{,}64\%$ a.a.

2 - Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?

Solução:

$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$

$1 + i_a = (1{,}005)^{12}$

$i_a = 0{,}0617 = 6{,}17\%$ a.a.

3- Qual é a taxa semestral equivalente para juros compostos a 10% ao ano?

Solução:

$1 + i_a = (1 + i_s)^2$

$1 + 0{,}10 = (1 + i_s)^2$

$1{,}10 = (1 + i_s)^2$

$$1 + i_s = \sqrt{1{,}10} \rightarrow 1 + i_s = 1{,}0488 \rightarrow i_s = 1{,}0488 - 1 = 0{,}0488 \rightarrow i_s \cong 4{,}88\%$$

4- Calcule o montante, em regime de juro composto, relativo a um capital de R$1000,00 empregado

1º) durante 1 ano, à taxa de 24% ao ano.

2º) durante 12 meses, à taxa de 2% ao mês.

Solução:

Temos: C= 1000 t= 1 ano i = 24% a.a. = 0,24 a.a.

Logo:

$M = C. (1 + i)^t$

Logo: $M_1 = 1000. (1 + 0{,}24)^1 = 1000 \times 1{,}24 \rightarrow M_1 = 1240$ isto é : M_1 = R$1240,00.

2º) Temos: C= 1000 t= 12 meses i = 2% a.m. = 0,02 a.m.

Logo:

$M = C. (1 + i)^t$

Logo: $M_{12} = 1000. (1 + 0{,}02)^{12} = 1000 \times 1{,}26824 \rightarrow M_{12} = 1268{,}24$ isto é : M_{12} = R$1268,00.

Como $M_{12} \neq M_1$ e as taxas empregadas (2% a.m. e 24 % a.a.) são proporcionais, podemos concluir que:**Em juros compostos, as taxas proporcionais não são equivalentes.**

5- Qual é a taxa trimestral equivalente a 30% ao ano?

Solução:

$i_a = 30\%$ a.a. = 0,3 a.a.

Como: $(1 + i_t)^4 = 1 + i_a$

Vem:

$(1 + i_t)^4 = 1 + 0{,}3 \rightarrow 1 + i_t = (1 + 0{,}3)^{1/4} \rightarrow i_t = (1{,}3)^{1/4} - 1 = 1{,}06778 - 1 \rightarrow i_t = 0{,}06778$, isto é:

$i_t = 0{,}0678$ a.t. ou 6,78% a.t.

6-Qual a taxa anual de juros de um financiamento que cobra juros mensais de 4,5%.

Temos que 4,5% = 4,5 / 100 = 0,045

$(1 + ia) = (1 + 0,045)^{12}$

$1 + ia = 1,045^{12}$

1 + ia = 1,6959

ia = 1,6959 – 1

ia = 0,6959

ia = 69,59 % ao ano

7-Determine a taxa mensal equivalente a 0,2% ao dia.

Sabemos que 0,2% = 0,2 / 100 = 0,002

$(1 + ia) = (1 + 0,002)^{30}$

$1 + ia = 1,002^{30}$

1 + ia = 1,0618

ia = 1,0618 – 1

ia = 0,0618

ia = 6,18% ao mês

8-Qual a taxa semestral equivalente a 40% ao ano.

Temos que 40% = 40 / 100 = 0,4

Nesse caso, vale ressaltar que 1 ano possui 2 semestres, então:

$(1 + ia)^2 = 1 + 0,4$

$(1 + ia)^2 = 1,4$

$1 + ia = 1,4^{1/2}$

1 + ia = 1,1832

ia = 1,1832 – 1

ia = 0,1832

ia = 18,32% ao semestre

9-Calcule os juros acumulados durante 2 anos referentes a uma taxa mensal de 0,5%.

0,5% = 0,5 / 100 = 0,005

$(1 + ia) = (1 + 0,005)^{24}$

$1 + ia = 1,005^{24}$

$1 + ia = 1{,}1271$

$ia = 1{,}1271 – 1$

$ia = 0{,}1271$

$ia = 12{,}71\%$

4-TAXAS NOMINAIS

A taxa nominal é aquela cujo período de capitalização não coincide com aquele a que ela se refere. A taxa nominal e, em geral, uma taxa anual. Alguns exemplos:

- 340% ao semestre com capitalização mensal.
- 1150% ao ano com capitalização mensal.
- 300% ao ano com capitalização trimestral.
- juros 48% ao ano capitalizados semestralmente.
-juros de 36% ao ano capitalizados mensalmente.

Exemplo:

Uma taxa de 15 % a.a., capitalização mensal, terá 16.08 % a.a. como taxa efetiva:

$15/12 = 1{,}25$ $\quad\quad$ $1{,}0125^{12} = 1{,}1608$

Para resolvermos problemas que trazem em seu enunciado uma taxa nominal, adotamos, por convenção, que a taxa por período de capitalização seja proporcional à taxa nominal.

Exemplo:

Qual é o montante de um capital de R$5000,00, no fim de 2 anos, com juros de 24% ao ano capitalizados trimestralmente?

Solução:

Temos: C=5000 $\quad$ t= 2 a $\quad$ i= 24%a.a. = 0,24 a.a.

Pela convenção adotada, temos:

$i_4 = 0{,}24/ 4 = 0{,}06^{a}.t.$

$t=2a = 2x\ 4t = 8t$

$M_8 = C.\ (1 + i_4)^{t}$

Logo: $M_8 = 5000.\ (1 + 0{,}06)^{8} = 5000 \times 1{,}59385 \rightarrow M_8 = 7969{,}25$, isto é, o montante é de R$7969,25.

5-TAXAS EFETIVAS

A taxa Efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:

- 140% ao mês com capitalização mensal.
- 250% ao semestre com capitalização semestral.
- 1250% ao ano com capitalização anual.

Taxa Real: é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

Exemplo:

Uma taxa nominal de 18% ao ano é capitalizada semestralmente. Calcule a taxa efetiva.

Solução:

Temos:

$i=18\%$a.a. = 0,18 a.a.

$1a = 2s \rightarrow k = 2$

$i_k = 0{,}18/2 = 0{,}09$

Logo:

$1 + i_f = (1 + i_k)^k$

i – a taxa nominal

i_f – a taxa efetiva

k – o número de capitalizações para um período da taxa nominal

i_k – a taxa por período de capitalização ($i_k = 1/k$)

Logo:

$1 + i_f = (1 + 0{,}09)^2 \rightarrow i_f = 1{,}18810 - 1 \rightarrow i_f = 0{,}18810$, isto é , a taxa efetiva é de 0,18810a.a. ou 18,81% a.a.

6-Juros Compostos e Progressões Geométricas

A maioria das operações financeiras efetuadas atualmente utiliza juros compostos para remunerar um capital. Para ilustrar, suponha, por exemplo, que uma pessoa aplicou R$ 1.000,00 em renda fixa a uma taxa de 20% ao ano. O montante M_1, obtido após um ano de aplicação, é calculado adicionando-se ao capital aplicado os juros do período, ou seja:

$M_1 = 1.000,00 + 0,20 \, . \, 1.000,00$

$M_1 = 1.000,00 \, . \, (1+ 0,20)$

$M_1 = 1.000,00 \, . \, 1,20$

$M_1 = 1.200,00$

Observe que, para aumentar uma quantia em 20%, basta multiplicá-la por 1,20. Dessa forma, o montante após dois anos é igual ao valor do montante após uma ano multiplicado por 1,20:

$M_2 = M_1 \, . \, 1,20$

$M_2 = 1.200,00 \, . \, 1,20$

$M_2 = 1.440,00$

O montante após três anos é igual ao montante após 2 anos multiplicado por 1,20:

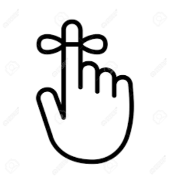
$M_3 = M_2 \, . \, 1,20$

$M_3 = 1.440,00 \, . \, 1,20$

$M_3 = 1.728,00$

Procedendo da mesma forma, podemos concluir que a sequência formada pelos valores dos montantes, ano a ano e com base no aplicado inicialmente, constitui-se numa PG cujo primeiro termo é igual a R$ 1.000,00 e cuja razão é igual a 1,20. Assim, teremos a seguinte sequencia:

(1.000,00 ; 1.200,00 ; 1.440,00 ; 1.728,00; ...)



Quando os juros gerados em cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros no período seguinte, dizemos que o capital cresce segundo o regime de capitalização composta. Nesse caso, se a taxa de variação percentual do capital for constante, os valores do capital seguem uma progressão geométrica e, por isso, podem ser modelados por uma função exponencial.

Para estudarmos o modelo de variação de uma capital em um regime de capitalização composta **C,** aplicado a uma taxa mensal de **i**%, durante **t** meses. O montante produzido pelo primeiro mês será:

$$M_1 = C.\ (1+i)$$

O montante produzido até o segundo mês é igual ao montante produzido no primeiro mês multiplicado por (1+i)

$$M_2 = M_1\ .\ (1+i)$$

$$M_2 = C\ .\ (1+i)\ (1+i)$$

$$M_2 = C\ .\ (1+i)^2$$

Dessa forma temos:

$$M_3 = C\ .\ (1+i)^3$$

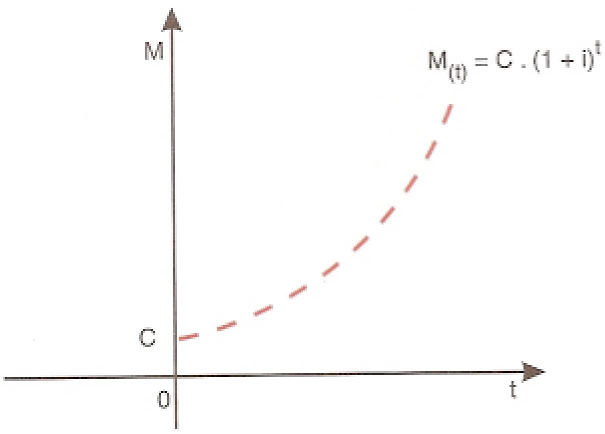
$$M_4 = C\ .\ (1+i)^4$$

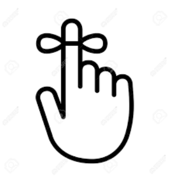
$$M_5 = C\ .\ (1+i)^5$$

Assim, o montante produzido até o mês t será dado por:

$$\mathbf{M(t) = C\ .\ (1+i)^t}$$

Essa última fórmula é utilizada para calcular o montante em uma aplicação de juros compostos, dados o capital **C**, a taxa de juros **i** e o prazo da aplicação **t**. A taxa de juros **i** deve referir-se a mesma unidade de tempo utilizada para o período **t**, ou seja, se a taxa for em 15% ao ano, por exemplo, o prazo de tempo deve ser considerado em anos.





A expressão (1 +i) é denominada “fator de um capital” e pode ser representada para diferentes valores de i e t.

Exemplos:

a) Um capital de R$100.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês, num regime de juros compostos, durante quatro meses. Qual foi o montante no fim de cada mês?

Período	Juros no Período	Montante
Após 0 meses	0	M_0=100 000
Após 1 mês	0,02 x 100 000= 2000	M_1= 100.000 + 100.000 x 0,02 →M_1 =102.000
Após 2 meses	0,02 x 102 000 = 2040	M_2= 102.000 + 102.000 x 0,02 →M_2 =104.040
Após 3 meses	0,02 x 104 040 = 2080,80	M_3= 104.040 + 104.040 x 0,02 →M_3 =106 120,80
Após 4 meses	0,02 x 106 120,80 = 2122,41	M_4= 106120,80 + 106 120,80 x 0,02 → M_4 = 108 243,2

CAPÍTULO 3 – DESCONTOS COMPOSTOS

1-Introdução

O conceito de desconto no regime de capitalização composta é o mesmo de desconto simples: é o abatimento que obtemos ao saldar um compromisso antes de seu compromisso.

Desconto composto é aquele obtido em função de cálculos exponenciais. São conhecidos dois tipos de descontos: **o desconto composto "por fora" e o desconto composto "por dentro", ou racional**. O desconto composto "por fora", não possui, pelo menos no Brasil, nenhuma utilização prática conhecida. Quanto ao desconto "por dentro" ou racional, ele nada mais é do que a diferença entre o valor futuro de um título e o seu valor atual, determinado com base no regime de capitalização composta; portanto de aplicação generalizada.

Desconto é antecipação de recebíveis, tais como cheques, boletos, notas promissórias, etc. Para exemplificar, suponha que no dia 01/05/2017 um comerciante recebeu como pagamento pela venda de uma mercadoria um cheque de R$1.000,00 com a inscrição "bom para 01/08/2017". Para atender a demanda de capital de giro da empresa, o comerciante procura seu banco para antecipar o valor do cheque. O banco adianta, por exemplo, R$ 950,00 ao comerciante e os outros R$ 50,00 fica para o banco pelo serviço de adiantamento. Nessa situação, cada valor possui um nome específico que iremos utilizar para falar sobre desconto composto.

Valor nominal (N) ou valor de face (F): é o valor estampado no cheque, boleto ou outros. No nosso exemplo, o valor nominal é de R$ 1.000,00.
Valor atual (A): é valor antecipado. No exemplo, o valor atual é de R$ 950,00.
Valor do desconto (D): é o valor cobrado pelo banco. É calculado pela diferença do valor nominal e o valor atual. No exemplo acima, o valor do desconto é de R$ 50,00.

Fórmula geral do desconto

Independentemente se é desconto composto ou desconto simples, existe uma fórmula que é aplicável nas duas situações. A fórmula parece bem óbvia, mas é muito útil na resolução dos exercícios de desconto. D = N – A

Traduzindo a fórmula temos que o desconto é a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

2-Desconto composto comercial

O desconto composto comercial, também conhecido como desconto bancário ou desconto por fora, é caracterizado por ser calculado com base no valor nominal do documento a ser descontado. **A** fórmula do desconto composto comercial é:

$$A = N.(1 - i)^t$$

Legenda:

N: valor nominal ou valor de face i: taxa de desconto comercial
t: períodos de antecipação A: valor atual ou valor antecipado

Tendo o valor atual e o nominal, basta utilizar a fórmula geral do desconto para calcular o desconto composto comercial.

3-Desconto composto racional

O desconto composto racional, também conhecido como **desconto por dentro**, é caracterizado por ser calculado com base no valor atual do documento a ser descontado. A **fórmula do desconto composto racional** é:

$$A = \frac{N}{(1 + i)^t}$$

Tendo o valor atual e o nominal, basta utilizar a fórmula geral do desconto para calcular o desconto composto racional.

Exemplo:

a)Um comerciante emite um boleto no valor de R$ 2.000,00 com data de vencimento para 4 meses. Para antecipar esse boleto o banco cobre uma taxa de juros de 2%a.m. Calcule o valor do desconto comercial e racional.

Solução:

Primeiro, vamos **calcular o desconto composto comercial**. Para isso, utilizamos a fórmula do valor atual do desconto composto comercial. Com o valor atual e o valor nominal, utilizamos a fórmula geral do desconto.

$$A = N.(1 - i)^t$$

$$A = 2000.(1 - 0{,}02)^4$$

$$A = 2000.(0{,}98)^4$$

$$A = 2000.\,0{,}92236816$$

$$A = 1844{,}74$$

D = N – A

D= 2000 – 1844,74

D= 155,26

Agora vamos calcular o desconto comercial racional. Para isso, utilizamos a fórmula do valor atual do desconto composto racional. Com o valor atual e o valor nominal, utilizamos a fórmula geral do desconto.

$$A = \frac{N}{(1 + i)^t}$$

$$A = \frac{2000}{(1 + 0{,}02)^4}$$

$$A = \frac{2000}{(1{,}02)^4}$$

$$A = \frac{2000}{1{,}08243216}$$

$$A = 1847{,}69$$

D = N – A

D= 2000 – 1847,69

D= 152,31

Portanto, conclui-se que o desconto comercial é mais vantajoso para o banco, visto que o valor descontado para antecipar o recebível foi maior.

b)Deseja-se resgatar um título com valor nominal de R$ 8 000,00, faltando 2 meses para o seu vencimento. Determine o valor atual, sabendo que a taxa de desconto é igual a 3% ao mês. Obs.: desconto composto racional

Solução:

N = 8000   i = 3% = 3/100 = 0,03   t = 2   A = ?

$$A = \frac{N}{(1+i)^t}$$

$$A = \frac{8000}{(1+0{,}03)^2}$$

$$A = \frac{8000}{(1{,}03)^2}$$

$$A = \frac{8000}{1{,}0609}$$

$$A = 7540{,}80$$

D = N – A

D= 8000 – 7540,80

D= 459,20

c) O valor nominal de um título é de R$ 190 000,00. Seu portador deseja descontá-lo 1 ano e 3 meses antes de seu vencimento. Calcule o valor de resgate sabendo que a taxa de desconto composto é de 28% ao ano, capitalizados trimestralmente. Obs.: desconto composto racional

Solução:

N = 190 000

t = 1 ano e 3 meses = 15 meses = 5 trimestres

i = 28% ao ano = 7% ao trimestre = 7/100 = 0,07

A = ?

$$A = \frac{N}{(1+i)^t}$$

$$A = \frac{190000}{(1+0{,}07)^5}$$

$$A = \frac{190000}{(1{,}07)^5}$$

$$A = \frac{190000}{1{,}402551730}$$

$$A = 135467{,}37$$

D = N – A $\rightarrow$ D= 190000 – 135467,37 $\rightarrow$D= 54532,63

CAPÍTULO 4 – EQUIVALÊNCIA ENTRE CAPITAIS

1-Introdução:

Em matemática financeira é importante que se compreenda que um valor é reajustado com o passar do tempo e que, portanto em situações distintas quando se quer fazer uma comparação sobre um determinado valor é necessário que tal comparação ocorra à mesma época para tais situações.

Este tipo de problema acontece muito quando se deseja financiar algum produto, que pode apresentar diversas formas de pagamento, sendo as mais comuns: a prazo, parcelada (postecipadamente) e parcelada (antecipadamente).

Para apresentar um exemplo sobre o assunto, faremos inicialmente uma apresentação sobre a definição desses tipos de compras parceladas.

Exemplos:

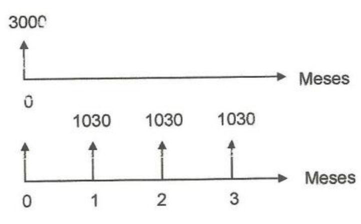
a) Samir possui duas opções na compra de uma televisão:

- A vista por R$3000,00
- Parcelado, postecipado, em três prestações mensais de R$1030,00.

Sabendo que ele possui o dinheiro para comprar tanto a vista quanto a prazo e que seu dinheiro pode ser aplicado na poupança a uma taxa de 0,5% ao mês.

Solução:

Observe o esquema a seguir:



Escolhendo o tempo 3 (mesma época) para fazer a equivalência de valores podemos concluir que:

Na opção à vista, o valor pago seria: X= 3000. $(1,005)^3$ = 3045,22

Na opção a prazo, o valor pago seria: Y = 1030 +1030.(1,005) + 1030. $(1,005)^2$ = 1030 + 1035,15 + 1040,33 ≅ 3105,48.

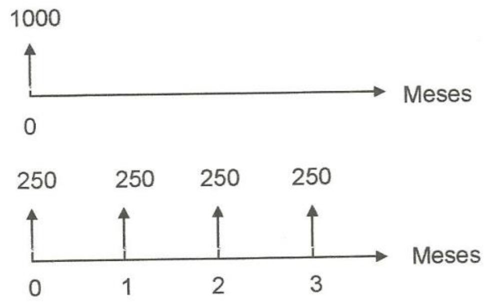
Observe que para Samir, nessa situação, seria mais interessante que pagasse o valor à vista em detrimento do valor a prazo, visto que a diferença entre esses valores na mesma unidade de tempo (3) é 3105,48 – 3045,22 = 60,26 (valor pago a mais na compra a prazo).

b) Alice deseja fazer um curso de inglês e ao fazer uma pesquisa de mercado, descobriu que a escola escolhida por ela lhe oferecia duas formas de pagamento para o curso.

- ✓ À vista por R$1000,00.
- ✓ Parcelado, antecipado, em quatro prestações mensais de R$250,00.

Sabendo que ela possui o dinheiro para comprar tanto à vista quanto a prazo e que seu dinheiro pode ser aplicado na poupança a uma taxa de 0,5% ao mês.

Solução:



Escolhendo o tempo 3 (mesma época) para fazer as comparações entre valores, concluímos que

- ✓ Caso à vista: X = 1000. $(1,005)^3$ = 1015,07
- ✓ Caso parcelado: Y = 250 + 250. 1,005 + 250. $1,005^2$ + 250. $1,005^3$ = 250 + 251,25 + 252,50 + 253,76 = 1007,51.

Observa-se que para Alice é mais vantajosa a escolha do pagamento a prazo, pois ela estará fazendo uma economia de 1015,07 – 1007,51 = 7,56.

c)(ENEM 2012) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

• Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;

• Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.

• Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.

• Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada deR$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.

• Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo. Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

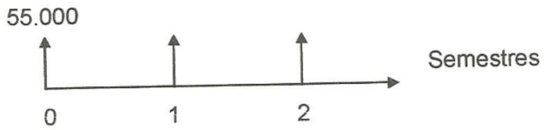
Obs.: Esta é uma situação muito comum no dia a dia de milhares de brasileiros que devem decidir sobre qual é a melhor opção de pagamento na compra de um determinado produto quando possui o dinheiro para pagar à vista e, ainda assim, caso não deseje fazer isso pode aplicar seu dinheiro em alguma aplicação financeira.

Solução:

Utilizaremos os conhecimentos de equivalência entre capitais, numa mesma época, para tomar a decisão correta do ponto de vista financeiro.

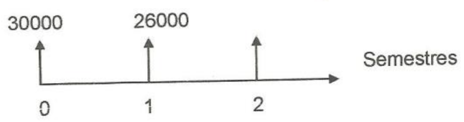
Escolhendo a época 2(final de 1 ano) para fazer a comparação temos:

- Opção 1



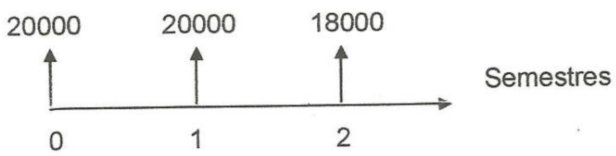
Na época 2: $55000 \times (1{,}1)^2 = 66550$

- Opção 2



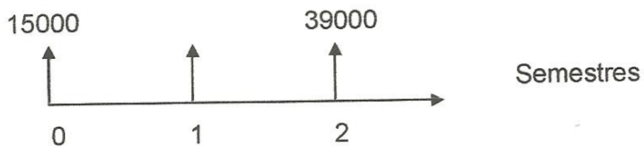
Na época 2: 30000 x $(1,1)^2$ + 26000 x (1,1) = 36300 + 28600 = 64900

- Opção 3



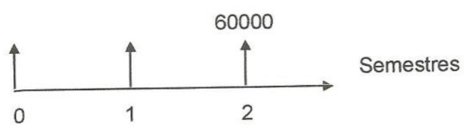
Na época 2: 20000 x $(1,1)^2$ + 20000 x (1,1) + 18000 = 24200 + 22000 + 18000 = 64200

- Opção 4



Na época 2: 15000 x $(1,1)^2$ + 39000 = 57150

- Opção 5

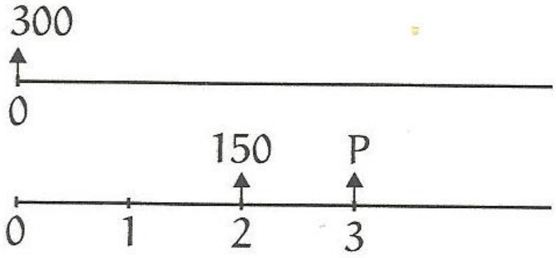


Na época 2: 60000

Observa-se que dentre todas as opções a que deu o menor resultado foi a de número 4. Portanto, esta é a mais vantajosa para Arthur.
Resposta: Letra D

d) Pedro tomou um empréstimo de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou 150 reais e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual é o valor desse último pagamento?
Solução:

Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, 300 reais, na data 0, têm o mesmo valor de 150 reais dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.



Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos

$$300 = \frac{150}{(1 + 0{,}15)^2} + \frac{P}{(1 + 0{,}15)^3}$$

Daí, P = 283,76. O último pagamento foi de R$283,76.

e) Uma loja oferece duas opções de pagamento:

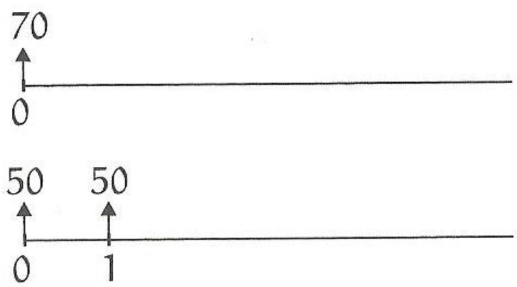
i) à vista, com 30% de desconto.

ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual é a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Solução:

Fixando o valor bem em 100, temos os esquemas de pagamento abaixo.



Igualando os valores, por exemplo, na época 0 (a data usada nessas comparações é chamada de data focal), obtemos $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$

Daí, i = 1,5 = 150%. A loja cobra 150% ao mês nas vendas a prazo.

f) Investindo seu capital a juros mensais de 8%, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?

Solução:

Temos: $C_0(1+0{,}08)^t = 2.C_0$

Daí, $1{,}08^{\,t} = 2$

$$t = \frac{log2}{log1{,}08} \cong 9$$

Em aproximadamente nove meses você dobrará o seu capital inicial.

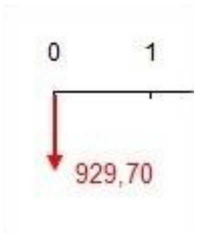
g) TRE AM 2010 [FCC]Uma pessoa deve para um banco a quantia de R$ 929,70. Não tendo recursos para pagar a dívida à vista, faz um acordo com o banco para pagá-la em duas prestações de valores iguais, vencíveis em 30 e 60 dias, respectivamente. Sabendo que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco é de 5% ao mês, o valor das parcelas é, em reais e considerando duas casas decimais,

(A) 464,85 (B) 488,09 (C) 500,00 (D) 511,34 (E) 516,50

Solução.

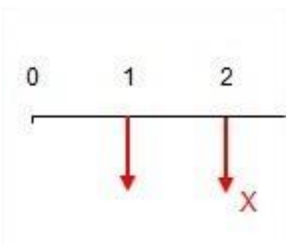
Seja 0 a data de hoje, a data em que a dívida é renegociada.

Primeira opção de pagamento:



Vamos escolher a data focal como a data 0. Valor deste fluxo de caixa na data 0: 929,70

Segunda opção de pagamento:



Valor deste fluxo de caixa na data 0:

$$\frac{X}{1{,}05} + \frac{X}{1{,}05^2}$$

Igualando os dois fluxos de caixa:

$$929{,}70 = \frac{X}{1{,}05} + \frac{X}{1{,}05^2}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $1{,}05^2$:

$$929{,}70 \times 1{,}05^2 = 1{,}05X + X$$

$$2{,}05X = 929{,}70 \times 1{,}05^2$$

$$X = \frac{929{,}70 \times 1{,}05^2}{2{,}05} = 499{,}99$$

Gabarito: C

h) TRE AM 2010 [FCC] Uma TV de LCD é vendida nas seguintes condições:

a) preço à vista = R$ 3.000,00;

b) condições a prazo = 20% de entrada e R$ 2.800,00 em 60 dias.

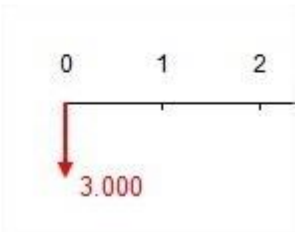
A taxa de juros simples mensal cobrada na venda a prazo é, considerando duas casas decimais,

(A) 7,14% a.m. (B) 8,01% a.m. (C) 8,33% a.m. (D) 9,46% a.m. (E) 16,67% a.m

Solução:

A diferença deste exercício para os anteriores é que o regime praticado é o regime simples. Vamos considerar como data 0 a data da compra.

Primeira opção de pagamento:

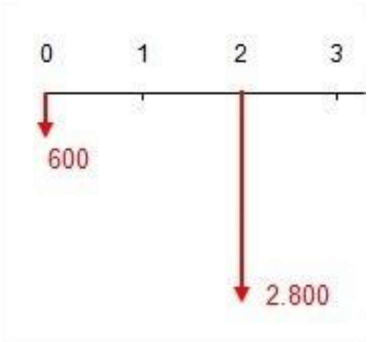


Segunda opção de pagamento:

Entrada de 20% do valor a vista:

$$0{,}2 \times 3.000 = 600$$

Pagamento em 60 dias: 2.800.



Agora vamos transportar todos os pagamentos para a data 0 (data focal). Primeiro fluxo de caixa, transportado para a data focal:

$$3.000$$

Segundo fluxo de caixa, transportado para a data focal:

$$600 + \frac{2.800}{1 + 2i}$$

Notem que, agora, utilizamos o desconto racional **simples**. Como o regime é de juros simples, utilizamos desconto racional simples (que corresponde ao juro simples que se deixa de pagar). Outro detalhe: diferentemente dos exercícios de regime composto, aqui não somos livres para escolher qualquer data focal. A data focal é aquela determinada na questão, pois a equivalência de capitais no regime simples só vale para algumas datas bem específicas. Considerando que as duas opções de pagamento são apresentadas ao cliente na data da compra (data 0), pressupõe-se que elas são calculadas de modo que nesta data haja a equivalência. Por isso utilizamos como data focal a data da compra.

Igualando os dois fluxos de caixa, na data 0:

$$3.000 = 600 + \frac{2.800}{1 + 2i}$$

$$3.000 - 600 = \frac{2.800}{1 + 2i}$$

$$2.400 = \frac{2.800}{1 + 2i}$$

$$1 + 2i = \frac{2.800}{2.400} = \frac{7}{6}$$

$$2i = \frac{7}{6} - 1$$

$$i = \frac{\left(\frac{7}{6} - 1\right)}{2} = 8{,}33\%$$

Gabarito: C

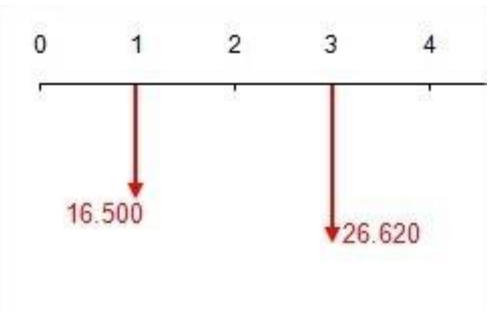
i) SEFAZ 2006 [FCC] Dois títulos cujos valores nominais são R$ 16.500,00 e R$ 26.620,00, vencíveis no fim de 1 ano e 3 anos, respectivamente, serão substituídos por um único título equivalente, vencendo no final de 2 anos. Adotando a operação do desconto racional composto à taxa de juros compostos de 10% ao ano, o valor nominal deste único título é

(A) R$ 39.200,00 (B) R$ 42.350,00 (C) R$ 44.165,00

(D) R$ 44.770,00 (E) R$ 47.432,00

Solução:

Inicialmente, o fluxo de caixa é:



Queremos substituir estes dois capitais por um capital único, referente à data 2. Ou seja, devemos transportar todos os capitais para a data focal 2. O valor de R$ 16.500,00 será transportado um ano para frente. Teremos uma operação de juros. O valor de R$26.620,00 será transportado um ano para o passado. Teremos uma operação de desconto racional composto.

Ficamos com:

$$16.500 \times 1{,}1 + \frac{26.620}{1{,}1} = 42.350$$

Gabarito: B

j) AFRFB 2005 [ESAF] Edgar precisa resgatar dois títulos. Um no valor de R$ 50.000,00 com prazo de vencimento de dois meses, e outro de R$ 100.000,00 com prazo de vencimento de três meses. Não tendo condições de resgatá-los nos respectivos vencimentos, Edgar propõe ao credor substituir os dois títulos por um único, com vencimento em quatro meses. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial simples é de 4% ao mês, o valor nominal do novo título, sem considerar os centavos, será igual a:

A) R$ 159.523,00 B) R$ 159.562,00 C) R$ 162.240,00

D) R$ 162.220,00 E) R$163.230,00

Solução:

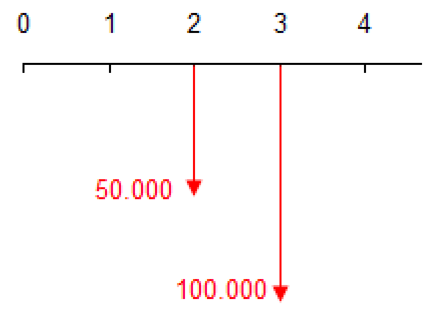
Questão bem diferente das anteriores, por dois motivos.

O primeiro é que agora temos o regime simples. No regime simples, a data focal (data para a qual vamos transportar todos os valores) tem bastante importância. Só podemos transportar os valores para a data que o exercício determinou. Só que o exercício não disse expressamente qual da data focal. O candidato tinha que entender que a data focal é justamente a data de hoje, a data na qual é feita a renegociação.

A segunda diferença é que o exercício pediu que trabalhássemos com desconto comercial. Ou seja, quando formos transportar um valor, ao longo da linha do tempo, para a esquerda, vamos usar o desconto comercial.

Por quê? Porque o exercício assim exigiu. Só que aí temos um problema. Nós vimos que a regra é usar o desconto racional. Este é o desconto que corresponde aos juros simples. Se transportarmos um valor de R$110,00 para a esquerda, com uma taxa de desconto racional simples de 5%, ao longo de dois meses, obtemos R$ 100,00. E se pegarmos estes R$ 100,00, e transportarmos de volta, avançando dois meses para direita, aplicando juros simples de 5%, obtemos novamente os R$ 110,00.

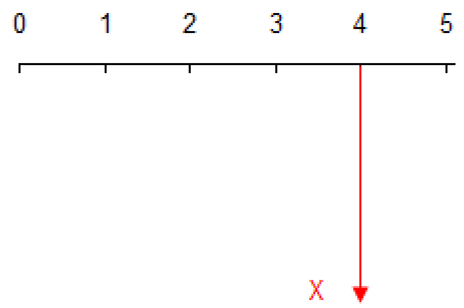
Juros simples e desconto racional simples guardam correspondência. Mas agora o exercício pediu para usarmos desconto comercial. O desconto comercial não corresponde a nenhum tipo de juros. Portanto, não poderemos transportar nenhum valor para a direita. Se transportássemos para a direita, precisaríamos usar juros simples, que não guardam correspondência com desconto comercial. Só podemos transportar para a esquerda, usando a taxa de desconto comercial fornecida de 4%. Muito bem, vamos construir o fluxo de caixa original.



A unidade de tempo está em meses. A data zero representa o dia de hoje. A data 1 representa o dia que está um mês para frente. A data 2 representa o dia que está dois meses para frente. E assim por diante.

O primeiro pagamento que Edgar deve fazer, portanto, ocorrerá na data 2. O segundo ocorrerá na data 3. Mas Edgar quer renegociar esta dívida. Quer substituir todos estes pagamentos por um único, a ser realizado na data 4.

Este pagamento único, ainda desconhecemos. Vamos chamar de X.



Se estes dois fluxos de caixa forem correspondentes, eles apresentarão o mesmo valor na data focal. Aqui está a grande diferença. Quando temos um regime composto (juros compostos e desconto racional composto), podemos escolher qualquer data focal.

Dois fluxos de caixa que apresentem o mesmo valor, por exemplo, na data de 10 de janeiro, apresentarão valores iguais entre si em qualquer outra data (10 de março, 20 de abril, etc). No regime simples, a correspondência só vale na data focal indicada no exercício. Neste caso, é a data de hoje, a data zero. Vamos transportar todos os valores para a data zero. Como os dois fluxos de caixa são correspondentes, nesta data, ambos apresentarão o mesmo valor. Comecemos pelo valor de R$ 50.000. Ele está na data 2.

Trazendo-o para a data zero, recuamos no tempo dois meses. Haverá desconto (que, excepcionalmente, devido a uma exigência expressa do exercício, é um desconto comercial simples).

$$A = N\ x\ (1 - t.i)$$

$$A = 50.000 \times (1 - 2 \times 0{,}04) = 46.000$$

Dizemos que R$ 46.000,00, referente à data zero, é correspondente a R$ 50.000,00, referente à data 2 (isto considerando um desconto comercial simples de 4% ao mês).

Vamos agora transportar o valor de R$ 100.000,00, da data 3 para a data zero. Estamos recuando no tempo três meses. Haverá um desconto comercial simples de 4% ao mês. $A = N\ x\ (1 - t.i)$

$$A = 100.000 \times (1 - 3 \times 0{,}04) = 88.000$$

E o valor do primeiro fluxo de caixa, na data zero, fica:

$$46.000 + 88.000 = 134.000$$

Vamos agora trazer o segundo fluxo de caixa (composto por um único pagamento), para a data zero. Estamos transportando o valor X da data 4 para a data zero. Estamos recuando no tempo 4 meses. Haverá desconto.

$$A = N\ x\ (1 - t.i)$$

$$A = X \times (1 - 4 \times 0{,}04) = 0{,}84X$$

E queremos que este valor seja igual a R$ 134.000,00.

$$0{,}84X = 134.000$$

$$X = \frac{134.000}{0{,}84} = 159.523{,}81$$

Gabarito: A.

j) AFRFB 2005 [ESAF] Em janeiro de 2005, uma empresa assumiu uma dívida no regime de juros compostos que deveria ser quitada em duas parcelas, todas com vencimento durante o ano de 2005. Uma parcela de R$ 2.000,00 com vencimento no final de junho e outra de R$ 5.000,00 com vencimento no final de setembro. A taxa de juros cobrada pelo credor é de 5% ao mês. No final de fevereiro, a empresa decidiu pagar 50% do total da dívida e o restante no final de dezembro do mesmo ano. Assim, desconsiderando os centavos, o valor que a empresa deverá pagar no final de dezembro é igual a:

A) R$ 4.634,00 B) R$ 4.334,00 C) R$ 4.434,00 D) R$ 4.234,00 E) R$ 5.234,00

Dados:

$$1{,}05^6 = 1{,}34$$

$$1{,}05^3 = 1{,}157$$

Solução:

Inicialmente, eram devidos dois pagamentos:

– 2.000,00, em junho

– 5.000,00, em setembro.

Como metade da dívida é paga em fevereiro, então os novos pagamentos em junho e em setembro seriam de:

– 1.000,00 em junho

– 2.500,00 em setembro

Mas a empresa quer substituir estes dois pagamentos por um único, a ser feito em dezembro. Precisamos transportar 1.000,00, de junho para dezembro. Estamos avançando no tempo 6 meses. Teremos uma operação de juros compostos.

$$M = 1.000 \times 1{,}05^6$$

Por fim, precisamos transportar os 2.500,00, de setembro para dezembro. Estamos avançando no tempo 3 meses. Temos uma operação de juros compostos:

$$M = 2.500 \times 1{,}05^3$$

Somando os dois montantes:

$$1.000 \times 1{,}05^6 + 2.500 \times 1{,}05^3$$

$$1.000 \times 1{,}34 + 2.500 \times 1{,}157 = 4.232{,}50$$

Gabarito: D

k)Fiscal SEFAZ PI – 2002 [ESAF]José tem uma dívida a ser paga em três prestações. A primeira prestação é de R$ 980,00 e deve ser paga ao final do terceiro mês; a segunda é de R$ 320,00 e deve ser paga ao término do sétimo mês; a terceira é de R$ 420,00 e deve ser paga ao final do nono mês. O credor cobra juros compostos com taxa igual a 5% ao mês. José, contudo, propõe ao credor saldar a dívida, em uma única prestação ao final do décimo segundo mês e mantendo a mesma taxa de juros contratada de 5%. Se o credor aceitar a proposta, então José pagará nesta única prestação o valor de:

A) R$ 1.214,91 B) R$ 2.114,05 C) R$ 2.252,05 D) R$ 2.352,25 E) R$ 2.414,91

Dados:

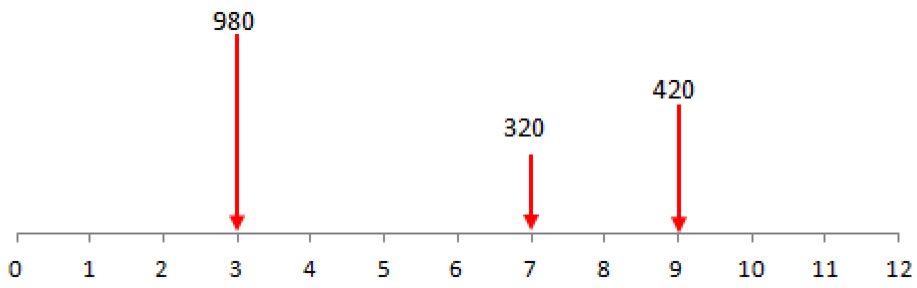
$1{,}05^9 = 1{,}551328$

$1{,}05^5 = 1{,}276281$

$1{,}05^3 = 1{,}157625$

Solução:

Vamos representar o fluxo de caixa correspondente:



A data 3 representa o final do terceiro mês. A data 7 representa o final do sétimo mês. A data 9 representa o final do nono mês. E queremos transportar todos estes valores para a data 12 (final do décimo segundo mês).

Comecemos pela primeira prestação da dívida de José. Ela deveria ser paga na data 3. Mas será paga na data 12, com nove meses de atraso. Portanto, a dívida aumentará, havendo incidência de juros de 5% ao mês (juros compostos).

Lembrem-se de que sempre que transportamos um valor para a direita (avançando no tempo), há juros. O valor desta primeira prestação ficará:

$$M = C \times (1 + i)^n$$

$$M = 980 \times (1 + 0{,}05)^9$$

$$M = 980 \times 1{,}55 = 1.519$$

Dizemos que R$ 1.519,00, referente à data 12, corresponde a R$ 980,00, referente à data 3, considerando uma taxa de juros compostos de 5% ao mês.

Vamos para a segunda prestação da dívida de José. Ela deveria ser paga na data 7. Mas será paga na data 12, com 5 meses de atraso.

Portanto, teremos juros compostos de 5% incidindo durante 5 meses. Novamente, estamos avançando no tempo. Portanto, há incidência de juros. Ficamos com:

$$M = C \times (1 + i)^n$$

$$M = 320 \times (1 + 0{,}05)^5$$

$$M = 320 \times 1{,}276 = 408{,}32$$

Dizemos que R$ 408,32, referente à data 12, equivale a R$ 320,00, referente à data 7 (considerando uma taxa de 5% ao mês). Por fim, temos a prestação de R$ 420,00, referente à data 9. Ela será paga na data 12, portanto, com três meses de atraso.

Como estamos avançando no tempo, haverá juros que aumentarão o valor da prestação. Seu valor fica:

$$M = C \times (1 + i)^n$$

$$M = 420 \times (1 + 0{,}05)^3$$

$$M = 420 \times 1{,}158 = 486{,}36$$

Dizemos que R$ 486,36, referente à data 12, equivale a R$ 420,00, referente à data 9. Pronto. Já passamos todos os pagamentos para a data 12. Já podemos somar todos eles.

O valor da dívida, ao final do décimo segundo mês (=data 12), considerando uma taxa de juros compostos de 5% ao mês, é:

$$1.519 + 408{,}32 + 486{,}36 = 2.413{,}68$$

Nosso valor está aproximado porque não utilizamos muitas casas após a vírgula.

Gabarito: E.

2-CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO FINANCEIRO

Capital financeiro e valor temporal do dinheiro Receber R$10.000 hoje ou no fim do ano? Hoje:

- Possibilidade de: **consumir** , **poupar** ou **ambas**

Fator tempo

Necessidade de reportar a um mesmo momento, diferentes capitais para efetuar a análise financeira.

Juro

Remuneração de um capital (ou conjunto de capitais) durante um prazo temporal

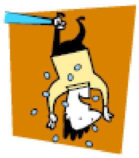
É a "recompensa" por renunciar (ou apenas adiar) o consumo.

É o valor a suportar pela utilização de capital alheio

Operação Financeira

Ato que transforma um ou mais capitais de um dado montante, noutros de outro montante, por ação do tempo e de uma taxa de juro.

Intervêm:

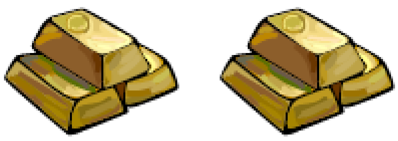


o **mutuário** (aquele que tem que pagar).

o **mutuante/emprestador** (o que tem a receber).

3- **REGRAS DE OURO (AXIOMAS) DO CÁLCULO FINANCEIRO**

Presença de capital e presença de tempo e ausência de juro é uma impossibilidade no cálculo financeiro. Ausência de capital ou ausência de tempo e presença de juro é outra impossibilidade. Isto é: o juro zero pode ocorrer se e só se o capital for zero ou/e o prazo for zero.



Qualquer operação matemática sobre dois ou mais capitais requer a sua homogeneização no tempo. Isto é: dados os capitais C e C’, pode fazer-se C + C’, ou C – C’, ou C > C’, ou C = C’, etc., se é só se eles estiverem referidos ao mesmo momento.

O juro em cada período de capitalização é igual ao capital do início do período multiplicado pela taxa de juro.

Isto é: sendo Jk o juro do período k, Ck-1 o stock de capital no início do mesmo período, isto é, no momento k-1, ik a taxa de juro em vigor no mesmo período vem:

Jk = ik x Ck-1 (com k = 1, 2, 3, …)

Exercício Extra:

As promoções do tipo “leve 3 e pague 2” comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre uma unidade vendida, de

A) 50/3 %   B) 20%   C)25%   D)30%   E) 100/3 %

Solução:

Considerando o preço de cada unidade vendida como m e a promoção “leve 3 pague 2”:

- O preço a ser pago é 2m.
- O preço que deveria ser pago é 3m.

Se. Para 3 unidades vendidas, o desconto é m, para uma unidade vendida, o desconto é m/3. Logo, $i = \frac{\frac{m}{3}}{m} . 100\% = \frac{100}{3}$ %.

Resposta: alternativa E.

Outra solução:

Em vez de pagar uma importância de 3, você pagará a quantia de 2 Portanto, a cada R$3,00 de "dívida", você paga R$2,00 e o R$1,00 que faltava é descontado.

Desconto de 1/3, ou seja, (100/3)%.

Outra solução:

Digamos que o preço de uma mercadoria seja x. Obviamente 3 mercadorias custam 3x. Mas existe uma promoção, "Leve três e pague dois". No lugar de pagar 3x pelas três produtos, só pagarei 2x ... o x a menos reduz o preço da unidade, se x representa o "total" de uma mercadoria, então dividirei o preço de uma mercadoria (100%) em três partes (são três mercadorias) e vou subtrair o resultado de cada mercadoria. O desconto vai ser de 100%/3 sobre cada mercadoria.

3 produtos 100%

1 produtos ....   x (este é o produto descontado, ou seja, 1, pois você estará levando somente 2)

3x = 100

x=33,3% ou 100/3%.

CAPÍTULO 5 – CAPITALIZAÇÃO E AMORTIZAÇÃO COMPOSTAS

1-Introdução

Quando se deseja fazer um investimento, pode-se depositar todos os meses certa quantia em uma caderneta de poupança; quando pretende-se comprar um bem qualquer, pode-se fazê-lo em prestações, a serem pagas mensalmente.

Pode-se constituir um capital ou resgatar uma dívida depositando ou pagando certa quantia, em épocas distintas. No primeiro caso temos uma capitalização e no segundo, uma amortização.

A seguir será mostrado como calcular os juros, as parcelas e os montantes (ou valores atuais) envolvidos nas operações de capitalização e de amortização.

Ao se realizar um investimento tem-se a expectativa de que este dinheiro depositado obtenha bons rendimentos. As formas de aplicar um dinheiro são as mais variadas, atendendo às necessidades de cada investidor. Uma boa alternativa de aplicação simples e segura é a caderneta de poupança, porém as taxas de juros utilizadas neste tipo de investimento são baixas. Caso se pretenda investir quantias mensais por um determinado tempo, a melhor opção a ser utilizada é a capitalização composta. Nesta modalidade, investe-se um valor fixo mensal que é aplicado a uma taxa de juros especificada no ato da adesão. Ao final do prazo estipulado retira-se todo o dinheiro investido acrescido dos juros.

A maioria das pessoas não conhece as modalidades de investimento existentes, mas o importante é conhecer o processo de capitalização mensal do dinheiro; as instituições fornecem somente o montante total.

2-Rendas

Denomina-se RENDA, a sucessão de depósitos ou prestações, em períodos diferentes, destinados a formar um capital ou pagar uma dívida.

Denominam-se termos da renda, os termos da sucessão de depósitos ou de prestações; e é chamado de período da renda, o intervalo de tempo que decorre entre os vencimentos de dois termos consecutivos.

Exemplo:

No caso de compra de um objeto em 7 prestações mensais de R$41,00, cada uma das prestações é um termo da renda e o período mensal. As rendas podem ser de dois tipos: certa ou aleatórias.

i) Rendas certas ou anuidades: ocorrem quando o número de termos, seus vencimentos e seus respectivos valores podem ser prefixados. Ex.: Compra de bens a prazo.
ii) Rendas aleatórias: ocorrem quando pelo menos um dos elementos não pode ser previamente determinado. Ex.: pagamento de seguro de vida (o número de termos é indeterminado).

Quando o período da renda é sempre o mesmo, dizemos que ela é periódica; caso contrário, é não-periódica. Nas rendas periódicas, se o período é o mês, o trimestre ou o ano, tem-se respectivamente, renda mensal, trimestral ou anual, e assim por diante.

Se todos os termos da renda são iguais, ela é denominada constante; caso contrário, é variável.

Quanto à data do vencimento do primeiro termo, uma renda certa pode ser imediata, antecipada ou diferida.

a) Imediata: acontece quando o vencimento do primeiro termo se dá no fim do primeiro período a contar da data zero, isto é, da data da assinatura do contrato.
Ex.: Compra de um bem a prazo, em prestações mensais, pagando a primeira prestação um mês após a assinatura do contrato.

b) antecipada: acontece quando o vencimento do primeiro termo se dá na data zero.
Ex.: Depósito mensal de uma mesma quantia em caderneta de poupança, durante um prazo determinado.

c) Diferida: acontece quando o vencimento do primeiro termo se dá no fim de um determinado número de períodos, a contar da data zero.
Ex.: Compra de um bem a prazo, em prestações mensais, pagando a primeira prestação no fim de um determinado número de meses.

- Sempre que o tipo de renda não for especificado, deve-se supor que se trata de renda imediata, por ser o tipo mais comum.

3- Capitalização Composta

Serão abordados exemplos visando a determinação do montante constituído por depósitos periódicos de quantias constantes sobre os quais incide a mesma taxa.

3.1- Renda Imediata

A situação exibida abordará uma capitalização de renda imediata, isto é, o vencimento do primeiro termo se dá no fim do primeiro período a contar da data de assinatura do contrato. Vamos construir uma tabela que nos permitirá a análise periódica da capitalização do dinheiro aplicado.

Exemplos:

a)Uma pessoa deposita em um banco, no fim de cada mês, durante 8 meses a quantia de R$ 100,00. Calcule o montante da renda, sabendo que esse banco paga juros compostos de 2% ao mês, capitalizados semestralmente.

Solução:

Dados

C = 100

i = 2% = 2/100 = 0,02

n = 8 meses

Meses	Depósitos mensais R$	Tempo de Capitalização	Capitalização	Montante
0	-		-	-
1	100,00	7 meses	$100 * (1+0{,}02)^7$	114,87
2	100,00	6 meses	$100 * (1+0{,}02)^6$	112,62
3	100,00	5 meses	$100 * (1+0{,}02)^5$	110,41
4	100,00	4 meses	$100 * (1+0{,}02)^4$	108,24
5	100,00	3 meses	$100 * (1+0{,}02)^3$	106,12
6	100,00	2 meses	$100 * (1+0{,}02)^2$	104,04
7	100,00	1 mês	$100 * (1+0{,}02)^1$	102,00
8	100,00	-	100	100,00
Total	800,00		-	858,30

Note que no 8º mês não houve capitalização, isto é, não terá rendimento, pois foi aplicado justamente no dia em se pediu o montante. A soma das capitalizações mensais pode ser dada da seguinte maneira:

S = 100 .(1 + 1,02 + 1,0404 + 1,0612 + 1,0824 + 1,1041 + 1,1262 + 1,1487)

S = 100 . 8,583 →S = 858,30

b) Uma pessoa deposita em uma financeira, no fim de cada mês, durante 5 meses, a quantia de R$100,00. Calcule o montante da renda, sabendo que essa financeira paga juros compostos de 2% ao mês, capitalizados mensalmente.

Solução:

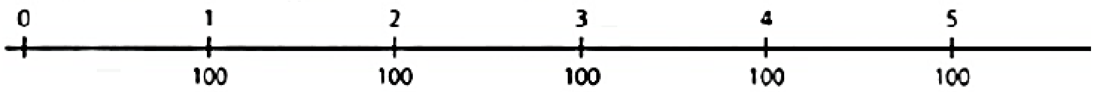
Tem-se:

C=100

i= 2% a.m. = 0,02 a.m.

t= 5 meses

O gráfico abaixo esquematiza a situação:

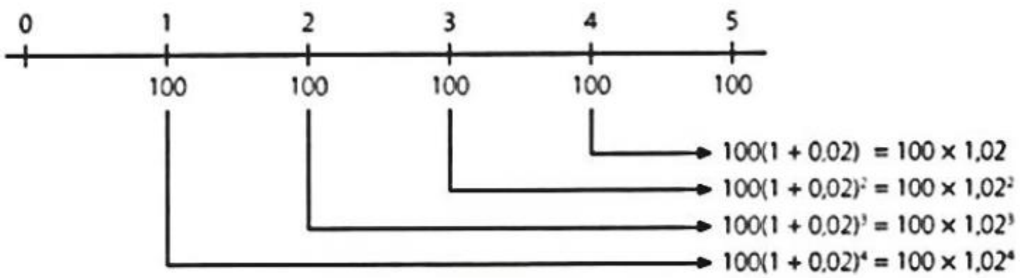


Assim, cada depósito (C = 100) representa o capital inicial, aplicado a 2% ao mês e por prazos que vão de 1 a 5 meses. O que se pede no problema é a determinação do montante desses depósitos na data final.

Sendo:

$M = C. (1 + i)^t$

a fórmula que nos dá o montante, e como o último depósito não terá rendimento, por ser aplicado exatamente no dia em que se pede o montante, resulta:



Como, por definição, o valor do montante de uma renda ($S_{\overline{n|}\, i}$) é igual à soma dos valores dos montantes de seus termos, pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
S_{\overline{5|}\, 0,02} &= 100 + 100 \cdot 1{,}02 + 100 \cdot 1{,}02^2 + 100 \cdot 1{,}02^3 + 100 \cdot 1{,}02^4 = \\
&= 100\left(1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3 + 1{,}02^4\right) = \\
&= 100\left(1 + 1{,}02 + 1{,}0404 + 1{,}0612 + 1{,}0824\right) = \\
&= 100 \cdot 5{,}204
\end{aligned}
$$

Daí: $S_{\overline{5|}\, 0,02}$ = 520,40, isto é, o montante da renda é de R$520,40.

$(S_{n\urcorner i})$: Lê-se cantoneira i ou, simplesmente, s.n.i.

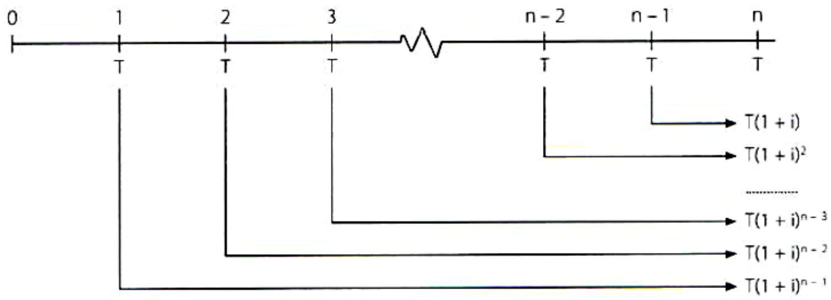
Pelo exemplo dado, podemos comprovar o esforço gasto para se obter o montante de uma renda. A seguir será apresentada uma fórmula para minimizar esse esforço.

Sendo: T= o valor dos depósitos periódicos

n = o número de períodos

i = a taxa de juros

Tem-se:



Logo:

$$S_{n\urcorner i} = T + T(1+i) + T(1+i)^2 + \ldots + T(1+i)^{n-3} + T(1+i)^{n-2} + T(1+i)^{n-1}$$

Ou:

$$S_{n\urcorner i} = T\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

A expressão que se encontra dentro dos colchetes é a soma dos termos de uma PG, na qual:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = (1+i)^{n-1} \\ q = 1 + i \end{cases}$$

Lembrando que :

$$S_n = \frac{a_n . q - a_1}{q - 1}$$

Pode-se escrever:

$$S_n = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i) - 1}{1 + i - 1}$$

Daí:

$$S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Tem-se então:

$$S_{\text{n}\urcorner\,\text{i}} = T\ x\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

O fator $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ é um fator de capitalização, indicado por ($s_{n\urcorner\, i}$).

Assim:

$$S_{\text{n}\urcorner\,\text{i}} = T\ x\ s_{\text{n}\urcorner\,\text{i}}$$

Essa fórmula nos dá o montante de uma renda imediata.

Se preferir pode-se utilizar a fórmula com letras já utilizadas anteriormente.

$$M = C.\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

M = Montante de uma renda imediata (valor futuro)

C= o valor dos depósitos periódicos (valor atual)

Exemplo:

a)Uma pessoa deposita em um banco, no fim de cada mês, durante 8 meses a quantia de R$ 100,00. Calcule o montante da renda, sabendo que esse banco paga juros compostos de 2% ao mês, capitalizados semestralmente.

Solução:

Dados: C = 100 i = 2% = 2/100 = 0,02 n = 8 meses

$$M = C.\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$M = 100.\frac{(1+0{,}02)^8 - 1}{0{,}02} \rightarrow M = 100.\frac{(1{,}02)^8 - 1}{0{,}02} \rightarrow M = 100.\frac{1{,}1716592 - 1}{0{,}02}$$

$$M = 100.\frac{0{,}1716592}{0{,}02} \rightarrow M = 100.\frac{0{,}1716592}{0{,}02} \rightarrow M = 100\ x\ 8{,}58296 \cong 858{,}30$$

b) Uma pessoa deposita em uma financeira, no fim de cada mês, durante 5 meses, a quantia de R$100,00. Calcule o montante da renda, sabendo que essa financeira paga juros compostos de 2% ao mês, capitalizados mensalmente.

Solução:

Tem-se:

C=100 i= 2% a.m. = 0,02 a.m. t= 5 meses

$$M = C.\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$M = 100.\frac{(1+0{,}02)^5 - 1}{0{,}02} \rightarrow M = 100.\frac{(1{,}02)^5 - 1}{0{,}02} \rightarrow M = 100.\frac{1{,}1040807 - 1}{0{,}02}$$

$$M = 100.\frac{0{,}1040807}{0{,}02} \rightarrow M = 100\ x\ 5{,}204035 \cong 520{,}40$$

c) Deposito em uma instituição financeira, no fim de cada mês, a importância de R$800,00, a 0,05% ao mês. Quanto terei no fim de 1 ano?

Solução:

Tem-se:

C=800 i= 0,5% a.m. = 0,005 a.m. t= 1 ano = 12 meses

$$M = C.\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$M = 800.\frac{(1+0{,}005)^{12} - 1}{0{,}005}$$

$$M = 800.\frac{(1{,}005)^{12} - 1}{0{,}005}$$

$$M = 800.\frac{1{,}0616772 - 1}{0{,}005}$$

$$M = 800.\frac{0{,}0616772}{0{,}005}$$

$$M = 800\ x\ 12{,}33544 \cong 9868{,}35$$

d)Calcular o valor das prestações mensais que, aplicadas por um ano e à taxa de 2% ao mês, geram um total capitalizado de R$50 000,00.

Solução:

Tem-se:

M = 50000,00   C= ?   t= 12 meses i = 2%a.m. = 0,02 a.m.

$$M = C.\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$50000 = C.\frac{(1+0{,}02)^{12} - 1}{0{,}02}$$

$$50000 = C.\frac{(1{,}02)^{12} - 1}{0{,}02}$$

$$50000 = C.\frac{1{,}2682413 - 1}{0{,}02}$$

$$50000 = C.\frac{0{,}2682413}{0{,}02}$$

$$50000 = C\ x\ 13{,}412065$$

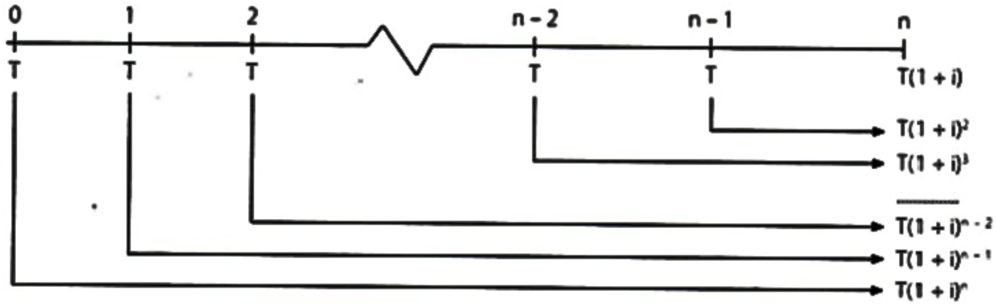
$$C = \frac{50000}{13{,}412065} \rightarrow C \cong 3727{,}98$$

3.2- Renda Antecipada

Seja:

$$\begin{cases} \text{T} = \text{o valor dos depósitos periódicos} \\ n = número\ de\ períodos \\ i = taxa\ de\ juro \end{cases}$$

Na renda antecipada depositamos, no início do período, n parcelas iguais a T, a uma taxa unitária i, referida à mesma unidade do período constante. Como, nesse caso, o depósito é feito no início do período, ao final deste período ele já estará dando origem a um montante. Então, usando um raciocínio análogo ao empregado na dedução da fórmula de renda imediata, tem-se:



Representando o montante de uma renda antecipada por $\bar{S}_{\overline{n|}\,i}$, pode-se escrever:

$$\bar{S}_{\overline{n|}\,i} + T = T + T(1+i) + T(1+i)^2 + T(1+i)^3 + \ldots + T(1+i)^{n-2} + T(1+i)^{n-1} + T(1+i)^n$$

Somando T a ambos os membros, vem:

$$\bar{S}_{\overline{n|}\,i} + T = T + T(1+i) + T(1+i)^2 + T(1+i)^3 + \ldots + T(1+i)^{n-2} + T(1+i)^{n-1} + T(1+i)^n$$

Examinando o segundo membro dessa igualdade, vê-se que ele nada mais é que o montante de uma renda imediata de n+1 termos, isto é:

$$\bar{S}_{\overline{n|}\,i} + T = T \cdot \bar{S}_{\overline{n+1|}\,i}$$

Daí:

$$\bar{S}_{\overline{n|}\,i} = T \cdot \bar{S}_{\overline{n+1|}\,i} - T$$

Ou:

$$\bar{S}_{\overline{n|}\,i} = T \cdot \left(\bar{S}_{\overline{n+1|}\,i} - 1\right)$$

Esta fórmula nos dá o montante de uma renda antecipada.

Obs.: $\bar{S}_{\overline{n|}\,i}$ Lê-se Sn barra, cantoneira i ou, simplesmente , S barra, n, i.

Se preferir pode-se utilizar a fórmula com letras já utilizadas anteriormente.

$$M = C.(1+i).s_{n\urcorner i}$$

$$M = C.(1+i).\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Sendo:

M = Montante de uma renda imediata (valor futuro)

C= o valor dos depósitos periódicos (valor atual)

$$s_{n\urcorner i} = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Exemplos:

a) Calcular o montante produzido por 12 parcelas de R$1000,00 colocados mensalmente a juros de 3% ao mês, sendo a primeira parcela antecipada.

Solução:

Tem-se:

M= ?   C=1000,00 t= 12 meses   i= 3% a.m. = 0,03 a.m.

$$M = C.(1+i).\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$M = 1000.(1+0{,}03).\frac{(1+0{,}03)^{12} - 1}{0{,}03}$$

$$M = 1000.(1{,}03).\frac{(1{,}03)^{12} - 1}{0{,}03}$$

$$M = 1000.(1{,}03).\frac{1{,}4257604 - 1}{0{,}03}$$

$$M = 1000.(1{,}03).\frac{0{,}4257604}{0{,}03}$$

$$M = 1000.(1{,}03).14{,}192013$$

$$M = 1000.14{,}617773 \rightarrow M \cong 14617{,}77$$

Resposta: O montante da renda é de R$ 14 617,77.

b) Quanto se deve depositar no início de cada semestre, numa instituição financeira que paga 18% ao ano, para constituir o montante de R$50000,00 no fim de 3 anos, sendo os juros capitalizados semestralmente?

Solução:

Tem-se: t= 3 anos = 3x2 = 6 semestres

i= 18% a.a. = 18/100 % a.s. = 9% a.s = 0,09 a.s.

M= R$50 000,00

C= ?

$$M = C.(1+i).\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$50000 = C.(1+0{,}09).\frac{(1+0{,}09)^6 - 1}{0{,}09} \rightarrow 50000 = C.(1{,}09).\frac{(1{,}09)^6 - 1}{0{,}09} \rightarrow$$

$$50000 = C.(1{,}09).\frac{1{,}6771 - 1}{0{,}09} \rightarrow 50000 = C.(1{,}09).\frac{0{,}6771}{0{,}09} \rightarrow$$

$$50000 = C.(1{,}09).\frac{0{,}6771}{0{,}09} \rightarrow 50000 = C.(1{,}09).7{,}5233 \rightarrow$$

$$50000 = C.(1{,}09).7{,}5233 \rightarrow 50000 = C.8{,}200397 \rightarrow C = \frac{50000}{8{,}200397} \rightarrow$$

$$C \cong 6097{,}26$$

4- Amortização Composta

Vamos agora, aprender a calcular o valor de uma dívida (ou de um empréstimo, ou o valor à vista de uma mercadoria) que será paga em prestações periódicas de quantias constantes, sobre as quais incide a mesma taxa.

Consideraremos aqui o caso de um empréstimo financiado em prestações mensais, com vencimento a partir do final do primeiro mês.

4.1- Renda Imediata

Como exemplo, admitiremos um valor de R$1000,00 a ser dividido e pago em 5 parcelas iguais, sobre as quais incidirá uma taxa de juros mensais de 6%.

Solução:

Ao final de cinco meses, a soma das parcelas pagas não deverá ser de R$1000,00, que era o valor inicial da dívida, mas sim igual a um valor corrigido à base de juros compostos de 6% a. m. Aplicando o mesmo juro a cada prestação, poderemos a tabela:

	Primeira Parcela	**Segunda Parcela**	**Terceira Parcela**	**Quarta Parcela**	**Quinta Parcela**
Primeiro Mês	C	______	______	______	______
Segundo Mês	C(1+0,06)	C	______	______	______
Terceiro Mês	$C(1+0,06)^2$	C(1+0,06)	C	______	______
Quarto Mês	$C(1+0,06)^3$	$C(1+0,06)^2$	C(1+0,06)	C	______
Quinto Mês	$C(1+0,06)^4$	$C(1+0,06)^3$	$C(1+0,06)^2$	C(1+0,06)	C

À soma das parcelas já corrigidas não é igual à dívida inicial, mas sim à dívida corrigida, que seria de $1000.(1+0,06)^5$.

Assim, deveremos ter:

$C + C(1,06) + C(1,06)^2 + C(1,06)^3 + C(1,06)^4 = 1000.\,(1,06)^5$

Aplicando a fórmula da somatória de PG ($S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$) , tem-se:

$a_1 = C$

$q = 1,06$

$a_n = C.(1,06)^4$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

$$1000.(1{,}06)^5 = \frac{C.(1{,}06)^5 - C}{1{,}06 - 1}$$

$$1000.(1{,}06)^5 = \frac{C.[(1{,}06)^5 - 1]}{0{,}06}$$

$$1000.(1{,}06)^5.0{,}06 = C.[(1{,}06)^5 - 1]$$

$$C = \frac{1000.(1{,}06)^5.0{,}06}{(1{,}06)^5 - 1}$$

$$C = \frac{1000.1{,}3382255.0{,}06}{1{,}3382255 - 1}$$

$$C = \frac{1000\ x\ 0{,}0802935}{0{,}3382255}$$

$$C = \frac{80{,}2935}{0{,}3382255} \rightarrow C \ \cong 237{,}40$$

Portanto, a fim de saldar a dívida de R$1000,00 em 5 meses, à taxa de 6% a.m. de juros, deve-se pagar uma prestação de R$237,40.

Percebe-se que, apesar de as prestações serem todas iguais a R$237,40, a simples multiplicação desse valor pelo número de prestações, que neste caso é 5, não tem como resultado o valor corrigido da dívida [$1000.(1 + 0{,}06)^5$]. Isso não acontece porque a primeira prestação de R$237,40 tem hoje um valor que não será o mesmo daqui a 5 meses. Essa consideração vale para todasas prestações.

Quando uma dívida vai sendo paga, dizemos que ela está sendo amortizada. O tipo de problema que acabamos de ver é chamado de amortização constante, pois as parcelas são sempre as mesmas durante todo o processo.

Vamos estabelecer uma relação entre a parcela periódica C e o total a ser amortizado M. Observe a tabela:

	Primeira Parcela	**Segunda Parcela**	**Terceira Parcela**	**...........**	**Enésima Parcela**
Primeiro Mês	C	______	_____	_____	_____
Segundo Mês	C(1+i)	C	_____	_____	_____
Terceiro Mês	$C(1+i)^2$	C(1+i)	C	_____	_____
....	....	....	....	....	_____
Enésimo Mês	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-3}$	....	C

Aplicando a somatória de PG aos termos corrigidos no último período, obteremos a dívida a ser corrigida:

$C + C(1+i) + C(1+i)^2 + \ldots + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1} = M.(1+i)^n$

Como

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

Temos:

$$M.(1+i)^n = \frac{C.(1+i)^{n-1}(1+i)^{n-1} - C}{(1+i)-1} = \frac{C.(1+i)^n - C}{i} = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i} \rightarrow$$

$$M.(1+i)^n = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i} \rightarrow M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n}$$

O fator $\frac{[(1+i)^n-1]}{i.(1+i)^n}$ recebe o nome de fator de correção da amortização e é representado internacionalmente por ($a_{n\urcorner i}$) . Este símbolo é lido da seguinte forma: “a n-cantoneira i”. Então a fórmula pode ser escrita do seguinte modo:

$$M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n} \rightarrow M = C\,.\,a_{n\urcorner i}$$

Exemplos:

a) Qual será o valor da prestação mensal de um financiamento de R$3500,00, feito à base de 2% a.m., em 10 prestações?

Solução:

M= 3500,00 i = 2% a.m. = 0,02 a.m. n=10 meses C = ?

$$M = C\,.\,a_{n\urcorner i} \; ou \; M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n}$$

$$3500 = \frac{C[(1+0{,}02)^{10} - 1]}{0{,}02.(1+0{,}02)^{10}}$$

$$3500 = \frac{C[(1{,}02)^{10} - 1]}{0{,}02.(1{,}02)^{10}}$$

$$3500 = \frac{C[1{,}2189941 - 1]}{0{,}02\,.\,1{,}2189941}$$

$$3500 = \frac{C[0{,}2189941]}{0{,}0243798}$$

$$3500 = C\,.\,8{,}9826044 \rightarrow C \cong 389{,}64$$

Desse modo, 10 prestações mensais de R$389,64 amortizarão uma dívida de R$3500,00 em 10 meses a 2% a.m.

Resposta: O valor da prestação mensal será de R$389,64.

b) Pagando 20 prestações de R$300,00 num financiamento feito à base de 6% a.m., que dívida estarei amortizando?

Solução:

M= ? i = 6% a.m. = 0,06 a.m. n=20 meses C = 300,00

$$M = C \, . \, a_{\mathrm{n}\urcorner\,\mathrm{i}} \; ou \; M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n}$$

$$M = \frac{300.[(1+0{,}06)^{20} - 1]}{0{,}06.(1+0{,}06)^{20}}$$

$$M = \frac{300.[(1{,}06)^{20} - 1]}{0{,}06.(1{,}06)^{20}}$$

$$M = \frac{300.[3{,}2071341 - 1]}{0{,}06 \, . \, 3{,}2071341}$$

$$M = \frac{300.[2{,}2071341]}{0{,}192428}$$

$$M = \frac{662{,}14023}{0{,}192428} \rightarrow M \cong 3440{,}98$$

Resposta: Estarei amortizando uma dívida de R$3440,98.

4.2- Renda Antecipada

No caso de renda antecipada a primeira prestação é paga na assinatura do contrato (data zero).

No caso de termos uma quantia M financiada em n parcelas através de uma taxa i, o valor das parcelas imediatas será dado, como já vimos por:

$$M = C \, . \, a_{\mathrm{n}\urcorner\,\mathrm{i}}$$

Se a prestação C for antecipada, isto é, pagável já na ocasião do contrato, podemos montar a seguinte tabela:

	Primeira Parcela	**Segunda Parcela**	**Terceira Parcela**	**.............**	**Enésima Parcela**
Primeiro Período	C(1+i)	_______	_______	_______	_______
Segundo Período	$C(1+i)^2$	C(1+i)	_______	_______	_______
Terceiro Período	$C(1+i)^3$	$C(1+i)^2$	C(1+i)	_______	_______
....	....	....	....	....	....
Enésimo Período	$C(1+i)^n$	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-2}$	....	C(1+i)

Somando as parcelas corrigidas, no enésimo período devemos obter o montante corrigido. Assim:

$M(1+i)^n = C(1+i) + C(1+i)^2 + ... + C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^n$

Usando a soma de PG iremos obter:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

$$M(1+i)^n = \frac{C.(1+i)^n.(1+i) - C.(1+i)}{(1+i) - 1}$$

Simplificando:

$$M = (1+i)C \,.\, a_{\text{n}\urcorner\,\text{i}}$$

Essa expressão relaciona a quantia total a ser amortizada (M), a parcela periódica antecipada de amortização (C), o número de parcelas (n) e a taxa do período (i). Como é possível perceber pela relação obtida, não deveremos encontrar grandes dificuldades em trabalhar com rendas antecipadas, uma vez que o raciocínio básico é o mesmo utilizado para rendas imediatas.

Exemplos:

a) Calcular a parcela antecipada de um financiamento de R$6700,00 feito em 12 parcelas mensais iguais, à taxa de mercado de 1,5%.

Solução:

M=6700   n =12   i=1,5% = 0,015   C=?

$$M = (1+i)C \,.\, a_{\text{n}\urcorner\,\text{i}}$$

$$6700 = (1 + 0{,}015)C \,.\, a_{12\urcorner\,1{,}5}$$

Precisamos calcular $a_{12\urcorner\,1,5} = \frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$

$$= \frac{(1+0{,}015)^{12}-1}{0{,}015.(1+0{,}015)^{12}} = \frac{(1{,}015)^{12}-1}{0{,}015.(1{,}015)^{12}} = \frac{1{,}1956176-1}{0{,}015.1{,}1956176} =$$

$$\frac{0{,}1956176}{0{,}0179342} = 10{,}907517$$

$$6700 = (1+0{,}015)C\,.\,a_{12\urcorner\,1,5} \rightarrow 6700 = (1{,}015)C.(10{,}907517) \rightarrow$$

$$6700 = C.11{,}071129 \rightarrow C = \frac{6700}{11{,}071129} \rightarrow C \cong 605{,}18$$

Resposta: A parcela antecipada do financiamento será de R$605,18.

b) Qual é o valor atual de uma renda antecipada de 9 parcelas iguais a R$1200,00 com taxa de 2,6% no período?

Solução:

C=1200 n= 9 i= 2,6% = 0,026 M= ? Valor atual da dívida

$$M = (1+i)C\,.\,a_{\mathrm{n}\urcorner\,\mathrm{i}}$$

$$M = (1+0{,}026).1200\,.\,a_{9\urcorner\,2,6}$$

Precisamos calcular $a_{9\urcorner\,2,6} = \frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$

$$a_{9\urcorner\,2,6} = \frac{(1+0{,}026)^9-1}{0{,}026.(1+0{,}026)^9} = \frac{(1{,}026)^9-1}{0{,}026.(1{,}026)^9} = \frac{1{,}259871-1}{0{,}026.1{,}259871} =$$

$$\frac{0{,}259871}{0{,}0327566} = 7{,}9333935$$

$$M = (1+0{,}026).1200\,.7{,}9333935 \rightarrow M = 1{,}026.1200.7{,}9333935 \rightarrow$$

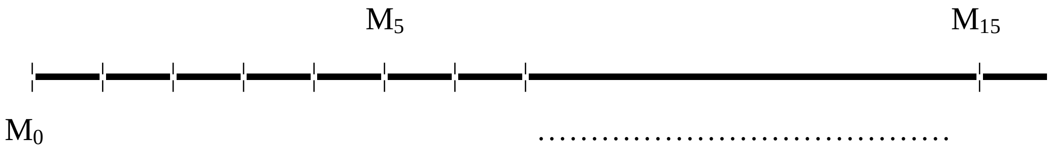
$$M \cong 9767{,}59$$

4.3- Renda Diferida

As parcelas diferidas são aquelas em que há um período de carência, isto é, vencem após certo período (maior que 1) a contar da ocasião do contrato.

Para entender melhor o que significa isso, vamos considerar o exemplo de um financiamento de R$4000,00 taxa de 3% a.m., a ser pago em 10 prestações, mas diferidas de 5 meses, isto é, que só começarão a ser pagas após o contrato.

Observe o esquema:



Visto que nos primeiros cinco meses não haverá parcelas, podemos aceitar que: $M_0 = M_{15} - M_5$.

Como $M_5 = C \,.\, a_{5\urcorner 3}$ e $M_{15} = C \,.\, a_{15\urcorner 3}$, podemos escrever:

$$M_0 = C \,.\, a_{15\urcorner 3} - C \,.\, a_{5\urcorner 3} \rightarrow M_0 = C \,.\, (a_{15\urcorner 3} - a_{5\urcorner 3}) \rightarrow$$

$$4000 = \mathrm{C}\,(11{,}937925 - 4{,}5797079) \rightarrow 4000 = \mathrm{C}.7{,}358218 \rightarrow$$

$$\mathrm{C} = \frac{4000}{7{,}358218} \rightarrow C \cong 543{,}60$$

Respostas: Nesse exemplo, as prestações deverão ser de R$543,60.

Obs:

$$a_{\mathrm{n}\urcorner\,\mathrm{i}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} \rightarrow a_{15\urcorner 3} = \frac{(1+0{,}03)^{15} - 1}{0{,}03.(1+0{,}03)^{15}} = \frac{(1{,}03)^{15} - 1}{0{,}03.(1{,}03)^{15}}$$
$$= \frac{1{,}5579667 - 1}{0{,}03.1{,}5579667} = \frac{0{,}5579667}{0{,}046739} \rightarrow a_{15\urcorner 3} = 11{,}937925$$

$$a_{\mathrm{n}\urcorner\,\mathrm{i}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} \rightarrow a_{5\urcorner 3} = \frac{(1+0{,}03)^{5} - 1}{0{,}03.(1+0{,}03)^{5}} = \frac{(1{,}03)^{5} - 1}{0{,}03.(1{,}03)^{5}}$$
$$= \frac{1{,}159274 - 1}{0{,}03.1{,}159274} = \frac{0{,}159274}{0{,}0347782} \rightarrow a_{5\urcorner 3} = 4{,}5797079$$

CAPÍTULO 6 – EMPRÉSTIMOS E PLANOS DE AMORTIZAÇÃO

1-Introdução

Um empréstimo ou financiamento pode ser feito a curto, médio ou longo prazo. Dizemos que um empréstimo é a curto ou médio prazo quando o prazo total não ultrapassa 1 ano ou 3 anos, respectivamente. Os empréstimos de grandes quantias por parte das financeiras para compra de imóveis vêm, em geral, acompanhados de prazos dilatados para o pagamento. São os chamados empréstimos a longo prazo. No caso desse tipo de empréstimo é importante compreendermos as maneiras mais comuns de quitação da dívida, ou seja, os sistemas de amortização. Vamos tratar dos sistemas em que a taxa de juros é constante e calculada sempre o saldo devedor. O que difere um sistema de amortização do outro é, basicamente, a maneira como são obtidas as parcelas. Elas podem ser constantes, variáveis ou até únicas, sendo compostas sempre por duas partes: juros e amortização propriamente dita.

Atualmente existe uma grande procura por empresas credenciadas para a obtenção de empréstimos. A necessidade e o desejo de conforto fazem com que a cada dia mais as pessoas recorram às financiadoras e, assim consigam dinheiro suficiente para saírem do aperto ou simplesmente para a aquisição de algum bem material, que até então era impossível adquirirem. Devido à facilidade e a comodidade para obtenção de crédito, os empréstimos têm sido a solução para muitos, porém os juros aplicados geralmente são altos e o valor que é pago ao final da quitação da dívida junto à financeira ou banco soma um montante que corresponde muitas vezes quase ao dobro do valor inicial ou até mais.

As facilidades para obtenção de empréstimos atraem muitas pessoas, mas elas sequer sabem como são feitos os cálculos e podem acabar sendo prejudicadas devido a essa omissão por parte das financeiras que fazem o possível para concederem o empréstimo devido à grande lucratividade que gira em torno dessas transações. Basicamente, os empréstimos são calculados de acordo com a Tabela Price, utilizada por bancos e financeiras. Cada empresa ou banco aplica uma porcentagem de juros ao mês, que varia de empresa para a empresa. Aposentados, pensionistas e servidores são beneficiados com juros mais baixos nas transações de empréstimos. São aplicados os juros mensalmente utilizando geralmente a Tabela Price e as prestações são sucessivas e iguais.

A Tabela Price é caracterizada pelos cálculos de prestações iguais e é utilizada por muitos lojistas e financiadoras que trabalham com a concessão de crédito ao consumidor. A princípio ela parece um pouco confusa, devido aos termos empregados e a minúcia dos cálculos feitos para que não exista erro. O sistema para cálculo começa com o valor à vista que será financiado para o cliente. Depois é preciso saber em quantas prestações esse valor será pago e qual a porcentagem de juros que será aplicada a esse montante mensalmente.

Depois que esses valores são determinados e fixados, existe uma fórmula para que se calcule qual serão os valores das parcelas a serem pagas mensalmente. A tabela consiste em cinco colunas onde estão dispostos os seguintes itens: mês, juros, amortização, saldo devedor e cálculo para o mês seguinte. Os meses correspondem a quantidade de parcelas a serem pagas. Os juros são determinados pela porcentagem que é cobrada por mês. A amortização corresponde ao valor pago após a quitação dos juros do período. O saldo devedor é a dívida que resta para quitação e o cálculo para o mês seguinte é o valor remanescente após a quitação dos juros e da amortização do referido período.

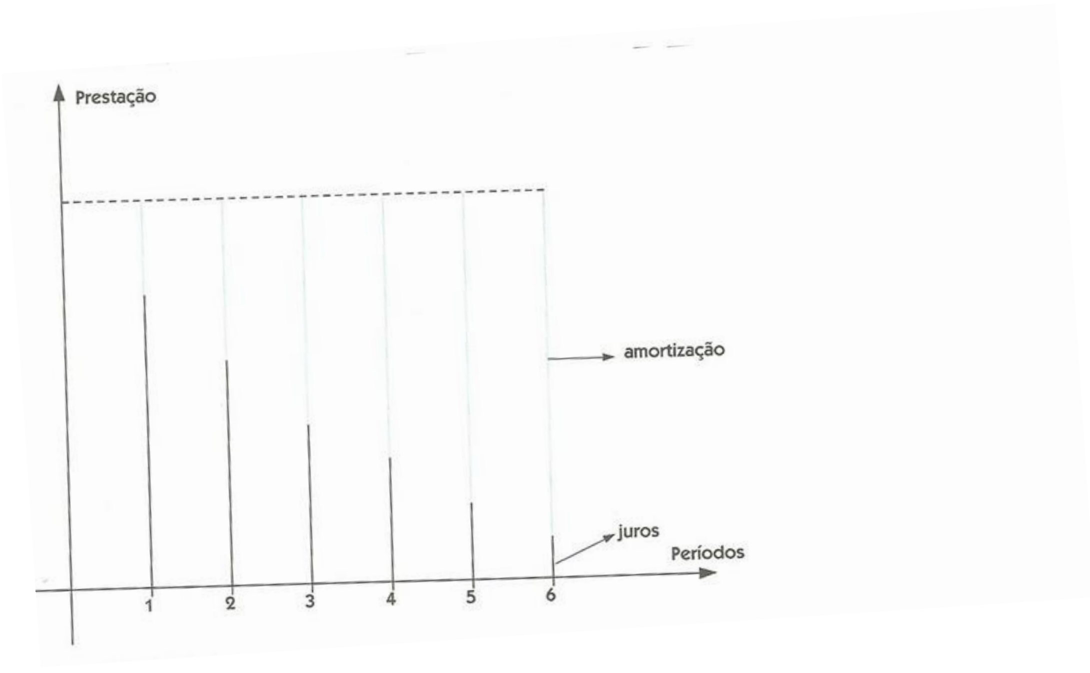
2- Sistema Francês de Amortização (SFA)

Nesse sistema, as prestações são sempre fixas. O que varia é a sua composição, ou seja, varia a parte correspondente aos juros e a parte correspondente à amortização da dívida inicial. Normalmente, os juros vão diminuindo à medida que os períodos vão decorrendo, ao contrário da amortização, que vai aumentando.

Vejamos, por exemplo, como poderiam ser algumas parcelas de um financiamento desse tipo:

Parcela	Juros	Amortização	Prestação
10ª	792,00	3049,40	3841,40
11ª	548,00	3293,30	3841,40
12ª	284,60	3556,80	3841,40

O gráfico apresentado a seguir esclarece melhor esta situação:



Observe que a prestação fixa é obtida adicionando-se juros e amortização, que variam na ordem inversa. Ou seja, os juros vão diminuindo e a amortização vai aumentando. Este sistema também pode ser acompanhado de prazo de carência. Nesse caso, os juros podem ser pagos durante o prazo de carência ou capitalizados no saldo devedor.

2.1- Sistema Francês sem prazo de carência

Consideremos, como exemplo, um empréstimo de R$10000,00 a ser pago, sem carência, em 8 parcelas à base de 5% a.m. de juros. A parcela nesse caso pode ser obtida por meio da fórmula.

$$M = C \, . \, a_{\overline{n|}\,i}$$

$$M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n}$$

$$10000 = \frac{C[(1+0{,}05)^8 - 1]}{0{,}05.(1+0{,}05)^8} \rightarrow 10000 = \frac{C[(1{,}05)^8 - 1]}{0{,}05.(1{,}05)^8} \rightarrow$$

$$10000 = \frac{C[1{,}4774552 - 1]}{0{,}05.1{,}4774552} \rightarrow 10000 = \frac{C[0{,}4774552]}{0{,}0738727} \rightarrow$$

$$10000 = C.6{,}4632157 \rightarrow C = \frac{10000}{6{,}4632157} \rightarrow C \cong 1547{,}22$$

Incidindo a taxa de 5% sobre o saldo devedor inicial, teremos a parte correspondente aos juros: Juros = 0,05 x 10000 = 500

Assim, a parte referente aos juros na primeira prestação será de R$500,00. Como a prestação total é de R$1547,22, o valor que amortiza a dívida é: Amortização = 1547,22 – 500 = 1047,22. Então o saldo devedor passa a ser: saldo = 10000 – 1047,00 = 8952,78. Ao final do primeiro período, teremos o seguinte:

Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
1	8952,78	1047,22	500	1547,22

O processo se repete agora para o segundo período:

Juros = 0,05 . 8952,78 = 447,64

Amortização = 1547,22 – 447,64 = 1099,58

Saldo Devedor = 8952,78 – 1099,58 = 7853,20

Desse modo, teremos ao final do segundo período a seguinte situação:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	7853,20	1099,58	447,64	1547,22

Repetindo o processo até a quitação total da dívida, obteremos um plano completo, apresentado na tabela que segue:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10000,00	____	____	____
1	8952,78	1047,22	500	1547,22
2	7853,20	1099,58	447,64	1547,22
3	6698,64	1154,56	392,66	1547,22
4	5486,35	1212,29	334,93	1547,22
5	4213,45	1272,90	274,32	1547,22
6	2876,90	1336,55	210,67	1547,22
7	1473,53	1403,37	143,85	1547,22
8	____	1473,54	73,66	1547,22
	TOTAL	**10000,00**	**2377,73**	**12377,76**

Podemos observar pela linha total, salvo aproximação, que:
Amortização + Juros = Total das Prestações.

2.2- Sistema Francês com prazo de carência e pagamento dos juros

Neste caso, é dado ao devedor um prazo durante o qual ele pagará apenas os juros da dívida, sem amortizá-la durante essa carência.

Tomemos o exemplo de um financiamento de R$10000,00 à taxa de 5% ao mês, durante 8 meses, com carência de 3 meses. Calculando os juros sobre o saldo devedor inicial, temos:

Juros = 10000 . 0,05 = 500. Este valor será pago nos três primeiros períodos. Desse modo, elaboramos o seguinte esquema:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10000,00	____	____	____
1	10000,00	____	500,00	500,00
2	10000,00	____	500,00	500,00

A partir do mês seguinte, inicia-se a amortização. Agora a prestação fixa será dada por:

$$M = C\,.\,a_{\overline{n}|\,i}$$

$$M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n}$$

$$10000 = \frac{C[(1+0{,}05)^8 - 1]}{0{,}05.(1+0{,}05)^8} \rightarrow 10000 = \frac{C[(1{,}05)^8 - 1]}{0{,}05.(1{,}05)^8} \rightarrow$$

$$10000 = \frac{C[1{,}4774552 - 1]}{0{,}05.1{,}4774552} \rightarrow 10000 = \frac{C[0{,}4774552]}{0{,}0738727} \rightarrow$$

$$10000 = C.6{,}4632157 \rightarrow C = \frac{10000}{6{,}4632157} \rightarrow C \cong 1547{,}22$$

Os juros e as amortizações serão, daqui para a frente, calculados do mesmo modo que no caso sem carência. O plano completo será, então, o seguinte:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10000,00	_____	_____	_____
1	10000,00	_____	500,00	500,00
2	10000,00	_____	500,00	500,00
3	8952,78	1047,22	500	1547,22
4	7853,20	1099,58	447,64	1547,22
5	6698,64	1154,56	392,66	1547,22
6	5486,35	1212,29	334,93	1547,22
7	4213,45	1272,90	274,32	1547,22
8	2876,90	1336,55	210,67	1547,22
9	1473,53	1403,37	143,85	1547,22
10	_____	1473,54	73,66	1547,22
	TOTAL	**10000,00**	**3377,73**	**13377,76**

2.3- Sistema Francês com carência e capitalização de juros

Neste caso, durante o período de carência, o devedor não paga os juros da dívida, que são capitalizados no saldo devedor.

Vamos considerar o mesmo exemplo do financiamento de R$10000,00, em 8 parcelas mensais, carência de 3 meses, taxa mensal de juros de 5% e capitalização dos juros no saldo devedor.

Os três primeiros períodos podem ser observados no quadro a seguir:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10000,00	____	____	____
1	10500,00	____	____	____
2	11025,00	____	____	____

Perceba que ao saldo devedor foram sendo acrescentados os juros não pagos. A partir do período seguinte começam a serem cobradas as parcelas referentes à amortização e aos juros. Da soma dessas parcelas resultará a prestação que, agora, deverá ser calculada a partir do saldo devedor atual (R$11025,00).

$$M = C \,.\, a_{\mathrm{n}\urcorner\,\mathrm{i}}$$

$$M = \frac{C[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n}$$

$$11025 = \frac{C[(1+0{,}05)^8 - 1]}{0{,}05.(1+0{,}05)^8} \rightarrow 11025 = \frac{C[(1{,}05)^8 - 1]}{0{,}05.(1{,}05)^8} \rightarrow$$

$$11025 = \frac{C[1{,}4774552 - 1]}{0{,}05.1{,}4774552} \rightarrow 11025 = \frac{C[0{,}4774552]}{0{,}0738727} \rightarrow$$

$$11025 = C.6{,}4632157 \rightarrow C = \frac{11025}{6{,}4632157} \rightarrow C \cong 1705{,}81$$

Os juros de 5% no primeiro período serão calculados sobre R$11025,00. Assim:

Juros = 11025 . 0,05 = 551,25

Amortização = prestação – juros = 1705,81 – 551,25 = 1154,56

Saldo Devedor = saldo devedor anterior – amortização = 11025,00 – 1154,56 = 9870,44

Desta vez, o esquema fica assim:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10000,00	____	____	____
1	10500,00	____	____	____
2	11025,00	____	____	____
3	9870,44	1154,56	551,25	1705,81

Para o próximo período, os juros de 5% serão calculados sobre o saldo devedor de R$9870,44.

Juros = 9870,44 . 0,05 = 493,52

Amortização = 1705,81 – 493,52 = 1212,29

Saldo Devedor = 9870,44 – 1212,29 = 8658,15

Neste caso, o plano completo de amortização será apresentado assim:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10000,00	____	____	____
1	10500,00	____	____	____
2	11025,00	____	____	____
3	9870,44	1154,56	551,25	1705,81
4	8658,15	1212,29	493,52	1705,81
5	7385,25	1272,90	432,91	1705,81
6	6048,70	1336,55	369,26	1705,81
7	4645,33	1403,37	302,44	1705,81
8	3171,79	1473,54	232,27	1705,81
9	1624,57	1547,22	158,59	1705,81
10	____	1624,57	81,23	1705,81
	TOTAL	**11025,00**	**2621,47**	**13646,48**

3- Tabela Price

O Sistema Price de Amortização é um caso particular do Sistema Francês, mas às vezes, eles são tratados como uma única coisa. Na verdade, a diferença entre os dos sistemas está no fato de que pela Tabela Price

- a taxa de juros é dada num período maior do que o do vencimento das parcelas. Geralmente a taxa é anual.
- o juro mensal é calculado utilizando-se uma taxa proporcional à taxa do financiamento. Como, em geral, a taxa do financiamento é anual e os juros são pagos mensalmente, a taxa utilizada no cálculo é $\frac{1}{12}$ da taxa estipulada.

Como exemplo, vamos elaborar o plano de amortização de R$10000,00, financiado a 12% a.a. e a ser pago em 8 meses, sem carência e de acordo com a Tabela Price. Para calcular a taxa utilizada mensalmente, temos:

$$i = \frac{12\% a.a.}{12} \rightarrow i = 1{,}0\ \%\ a.m.$$

A prestação constante será dada por:

$$M = C\ .a_{\mathrm{n}\urcorner\mathrm{i}} \rightarrow 10000 = \frac{C[(1+0{,}01)^8 - 1]}{0{,}01.(1+0{,}01)^8} \rightarrow 10000 = \frac{C[(1{,}01)^8 - 1]}{0{,}01.(1{,}01)^8} \rightarrow$$

$$10000 = \frac{C[1{,}0828566 - 1]}{0{,}01\ .1{,}0828566} \rightarrow 10000 = \frac{C[0{,}0828566]}{0{,}0108285} \rightarrow$$

$$10000 = C\ .7{,}6517153 \rightarrow C = \frac{10000}{7{,}6517153} \rightarrow C \cong 1306{,}90$$

Assim, termos no primeiro período:

Juros = 0,01 . 10000,00 = 100,00

Amortização = prestação – juros = 1306,90 – 100,00 = 1206,00

Saldo Devedor = 10000,00 – 1206,00 = 8793,10

Repetindo esse procedimento para cada período, teremos o plano completo.

Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	10000,00	_____	_____	_____
1	8793,10	1206,90	100,00	1306,90
2	7574,13	1218,97	87,93	1306,90
3	6342,97	1231,16	75,74	1306,90
4	5099,50	1243,47	63,43	1306,90
5	3843,59	1255,91	50,99	1306,90
6	2575,13	1268,46	38,44	1306,90
7	1293,98	1281,15	25,75	1306,90
8	(acerto)0,02	1293,96	12,94	1306,90
	TOTAL	**10000,00**	455,20	10455,20

Neste caso é bom lembrar que a taxa proporcional utilizada de 1,0% não é equivalente a 12% a.a. a taxa equivalente poderia ser calculada por:

$$i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1 \rightarrow 0{,}01 + 1 = \sqrt[12]{1+i} \rightarrow (1{,}01)^{12} - 1 = i \rightarrow i = 0{,}126825$$

Ou:

$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$

$1 + i_a = (1 + 0{,}01)^{12}$

$1 + i_a = (1{,}01)^{12}$

$1 + i_a = 1{,}126825$

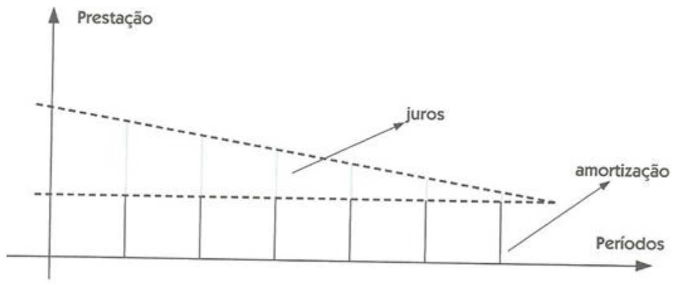
$i_a = 1{,}126825 - 1$

$i_a = 0{,}126825$

Desse modo a taxa equivalente anual do financiamento é de, aproximadamente, 12,68% a.a.

4- Sistema de Amortização Constante (SAC) ou Sistema Hamburguês

Neste caso, as prestações são variáveis, a amortização é fixa e os juros, em geral, vão diminuindo à medida que os períodos vão decorrendo. O gráfico apresentado a seguir esclarece melhor esta situação:



Observe que os juros e as prestações são funções do 1º grau.

4.1- SAC sem prazo de carência

Vamos supor um financiamento de R$2000,00 à taxa de 3% a.m., com um prazo de 8 meses. A parcela fixa da amortização é obtida dividindo o valor financiado (R$2000,00) pelo número de prestações. Como no financiamento que tomamos como exemplo o número de prestações é 8, temos: $\frac{2000}{8} = 250$.

A parcela de juros vai variar em função do saldo devedor, tomado no período anterior. Assim, elaboramos os cálculos referentes à primeira parcela:

Saldo Devedor = 2000,00

Juros = 2000 . 0,03 = 60,00

Amortização = 250,00

Prestação = 250 + 60 = 310,00

Então, ao final do período, teremos:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
1	1750,00	250,00	60,00	310,00

Agora, vamos fazer os cálculos referentes à segunda parcela:

Saldo Devedor = 1750,00

Juros = 1750 . 0,03 = 52,50

Amortização = 250

Prestação = 250 + 52,50 = 302,50

Ao final desse período teremos:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	1500,00	250,00	52,50	302,50

Repetindo esse processo até a quitação total da dívida, iremos obter o seguinte plano:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2000,00	____	____	____
1	1750,00	250,00	60,00	310,00
2	1500,00	250,00	52,50	302,50
3	1250,00	250,00	45,00	295,00
4	1000,00	250,00	37,50	287,50
5	750,00	250,00	30,00	280,00
6	500,00	250,00	22,50	272,50
7	250,00	250,00	15,00	265,00
8	____	250,00	7,50	257,50
	TOTAL	**2000,00**	**270,00**	**2270,00**

4.2- SAC com prazo de carência e pagamento de juros

Neste caso, durante o período de carência é feito apenas o pagamento dos juros, não havendo nenhuma amortização. Vejamos um exemplo:

Consideremos um financiamento de R$2000,00, à taxa de 8% ao mês, com um período de carência de 3 meses. O plano de amortização estará de acordo com a tabela:

Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	2000,00	____	____	____
1	2000,00	____	60,00	60,00
2	2000,00	____	60,00	60,00
3	1750,00	250,00	60,00	310,00
4	1500,00	250,00	52,50	302,50
5	1250,00	250,00	45,00	295,00
6	1000,00	250,00	37,50	287,50
7	750,00	250,00	30,00	280,00
8	500,00	250,00	22,50	272,50
9	250,00	250,00	15,00	265,00
10	____	250,00	7,50	257,50
	TOTAL	**2000,00**	**390,00**	**2390,00**

4.3- SAC com prazo de carência e juros capitalizados no saldo

Neste caso, o devedor não paga absolutamente nada durante a carência, pois os juros desse período vão servir para aumentar o saldo devedor.

Exemplo:

Para o financiamento de R$2000,00 à taxa de 3% a.m., durante 8 meses e com um período de carência de 3 meses, podemos começar calculando o saldo capitalizado. Assim, depois de um período, temos:

$Saldo_1 = 2000 \,.\, 1{,}03 = 2060{,}00$

E depois de dois períodos:

$Saldo_2 = 2060 \,.\, 1{,}03 = 2121{,}80$

Para calcular a parcela fixa de amortização é necessário dividir 2121,80 por 8.

$$\frac{2121{,}80}{8} \cong 265{,}23$$

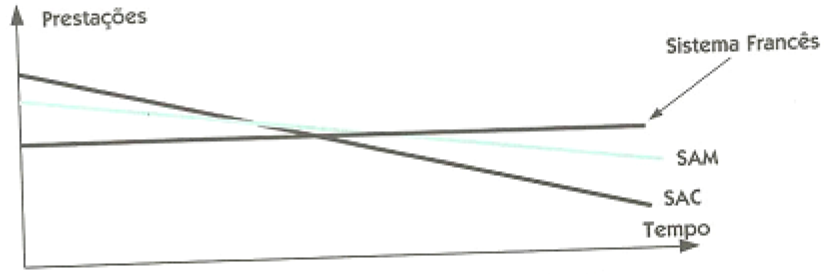
Daqui para a frente, o processo é o mesmo. A tabela com todo o plano deverá ficar assim:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2000,00	____	____	____
1	2060,00	____	____	____
2	2121,80	____	____	____
3	1856,57	265,23	63,65	328,88
4	1591,34	265,23	55,70	320,93
5	1326,11	265,23	47,74	312,97
6	1060,88	265,23	39,78	305,01
7	795,65	265,23	31,83	297,06
8	530,42	265,23	23,87	289,10
9	265,19	265,23	15,91	281,14
10	____	265,19	7,96	273,15
	TOTAL	**2121,80**	**286,44**	**2408,24**

Observação: Comparando as tabelas dos planos de carência com pagamento ou não dos juros no período, é possível perceber que se paga mais usando o segundo sistema. Isso ocorre porque o que deveria ser juro passa a ser principal.

5- Sistema de Amortização Misto (SAM)

Este é um sistema, mais moderno que não apresenta nenhuma dificuldade teórica em relação aos que já foram estudados, uma vez que ele é simplesmente a média aritmética entre o Sistema Francês de Amortização e o SAC. O gráfico a seguir compara a evolução das prestações nesses três sistemas.



Suponha dois planos de financiamento de R$10000,00 em 5 meses, à taxa de 5% ao mês, primeiro pelo SAC e depois pelo Sistema Francês.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)				
Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	10000,00	____	____	____
1	8000,00	2000,00	500,00	2500,00
2	6000,00	2000,00	400,00	2400,00
3	4000,00	2000,00	300,00	2300,00
4	2000,00	2000,00	200,00	2200,00
5	____	2000,00	100,00	2100,00
	TOTAL	**10000,00**	**1500,00**	**11500,00**

SISTEMA FRANCÊS				
Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	10000,00	____	____	____
1	8190,00	1809,75	500,00	2309,75
2	6290,01	1900,24	409,51	2309,75
3	4294,76	1995,25	314,50	2309,75
4	2199,75	2095,01	214,74	2309,75
5	____	2199,75	109,99	2309,75
	TOTAL	**10000,00**	**1548,74**	**11548,75**

O mesmo plano calculado com base no SAM ficaria assim:

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)				
Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	10000,00	____	____	____
1	8095,20	1904,80	500,00	2404,88
2	6245,08	1950,12	404,76	2354,88
3	4147,45	1997,63	307,25	2304,88
4	2099,94	2047,51	207,37	2254,88
5	____	2099,94	105,00	2204,88
	TOTAL	**10000,00**	**1524,38**	**11524,40**

Perceba que, tanto pelas prestações como pelos juros ou pelo saldo devedor, em cada período os valores no SAM são, com exceção da aproximação, a média aritmética entre o valor do SAC e o do Sistema Francês.

6- Sistema Americano

Neste sistema, a devolução do dinheiro emprestado, ao final da carência, é feita numa única parcela. Os juros podem ser pagos pelo devedor de duas maneiras: durante a carência ou capitalizados no principal.

6.1- Juros pagos na carência

Vamos supor um empréstimo de R$2000,00 à taxa de 3% ao mês, durante 8 meses. O plano ficaria assim:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2000,00	____	____	____
1	2000,00	____	60,00	60,00
2	2000,00	____	60,00	60,00
3	2000,00	____	60,00	60,00
4	2000,00	____	60,00	60,00
5	2000,00	____	60,00	60,00
6	2000,00	____	60,00	60,00
7	2000,00	____	60,00	60,00
8	____	2000,00	60,00	2060,00
	TOTAL	2000,00	480,00	2480,00

6.1- Juros capitalizados no saldo devedor

Tomando o exemplo anterior, teremos neste caso.

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	**2000,00**	____	____	____
1	**2060,00**	____	____	____
2	**2121,80**	____	____	____
3	**2185,45**	____	____	____
4	**2251,02**	____	____	____
5	**2318,55**	____	____	____
6	**2388,10**	____	____	____
7	**2459,75**	____	____	____
8	____	2000,00	533,54	2533,54
	TOTAL	2000,00	533,54	2533,54

7- Plano livre de amortização

Conhecendo os princípios que orientam cada sistema, você poderá montar – após um entendimento entre credor e devedor ou mutuário – o sistema financeiro de amortização que desejar. Vejamos um exemplo:

Construir o plano de financiamento de R$2000,00 a 10% ao mês, com amortização a ser feita por meio de quatro parcelas bimestrais, a saber:

- primeira = R$500,00
- segunda = R$400,00
- terceira = R$600,00
- quarta = R$500,00

Como são bimestrais, os juros sobre o saldo devedor serão calculados da seguinte maneira:

- após um período: 2000 . 0,1 = 200

  200 . 0,1 = 20

  J = 200 + 220 = 420

- após dois períodos: : 1500 . 0,1 = 150

  150 . 0,1 = 15

  J = 150 + 165 = 315

No quadro a seguir, poderemos observar o plano completo:

Período	**Saldo Devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	2000,00	____	____	____
1	1500,00	500,00	420,00	920,00
2	1100,00	400,00	315,00	715,00
3	500,00	600,00	231,00	831,00
4	____	500,00	105,00	605,00
	TOTAL	2000,00	1071,00	3071,00

Avaliação

Esta avaliação corresponde a 100% da nota do segundo módulo.

Cursista: ____

1ª Questão:

Calcular o montante de um capital inicial de R$6 000,00, a juros compostos de 5% a.m., durante 6 meses.

2ª Questão:

Se um capital de R$500 é aplicado durante 4 meses no sistema de juros compostos sob uma taxa mensal fixa que produz um montante de R$800, qual será o valor da taxa mensal de juros?

3ª Questão:

Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?

4ª Questão:

Qual a taxa mensal de juros referentes a uma taxa anual de 144%?

5ª Questão:

De quanto será o desconto que um título de R$8000,00, à taxa de 8% a.m., sofre ao ser resgatado dois meses antes do vencimento? Obs.: desconto composto racional

6ª Questão:

Uma pessoa fez uma aplicação de R$1000,00. Supondo rendimento constante de 2% a.m., determine

a) o montante após um ano de aplicação.

b) o tempo necessário para que essa pessoa possa resgatar a quantia de R$2000,00.

7ª Questão:

No dia 1º de junho, Alexandre fez uma aplicação no valor de R$2000,00. Nesse mês, a taxa de rendimento da aplicação foi de 1,2% e, em julho, foi de 1,4%. Qual será o saldo de Alexandre em 1º de agosto?

8ª Questão:

Em 1º de fevereiro, um investidor aplicou R$5000,00, a juros compostos, e à taxa de 10% a.m. Em 1º de junho do mesmo ano, resgatou o montante de aplicação, retirando R$3000,00 para despesas pessoais. No mesmo dia, trocou o fundo de investimento e aplicou a quantia que sobrou, a juros compostos e à taxa de 15% a.m. Qual é o montante disponível em 1º de novembro daquele ano?

9ª Questão:

Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um objeto.

i) três prestações mensais de R$160,00 cada.

ii) sete prestações mensais de R$70,00 cada.

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Pedro, qual é a melhor opção que Pedro possui?

10ª Questão:

Pedro tem três opções de pagamento na compra de vestuário.

i) à vista, com 30% de desconto.

ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

iii) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual é a melhor opção para Pedro, se o dinheiro vale, para ele, 25% ao mês?